調日算

1 導入

この講義の核心は、暦の周期（7 日/週、12 ヶ月、60 干支など）は合同式の演算に過ぎず、中国剰余定理によって複合周期問題が系統的に解けることである。

「2026 年 1 月 1 日は何曜日か」「干支が同じになるのは何年後か」—これらは全て整数の余りの問題である。

2 用語と定義

2.1 調日算

Calendar arithmetic

調日算 とは、暦の周期性を合同式で記述し、特定の日付・曜日・干支を計算する手法の総称である。

「調日」という命名：日を調える・計算する意味。中国算学の伝統に由来し、孫子算経の問題形式がその原型。

2.2 暦の主要な周期

単位	周期	対応するmod
曜日	7 日	mod 7
干支（十干）	10 年	mod 10
干支（十二支）	12 年	mod 12
干支（六十干支）	60 年	mod 60（$= \mathrm{lcm}(10, 12)$）
旧暦の閏月	19 年（メトン周期）	mod 19

$\gcd(10, 12) = 2 \neq 1$ なので十干と十二支に直接 CRT は使えないが、$\mathrm{lcm}(10, 12) = 60$ が実際の周期になる。

3 方針

3.1 基本：基準日からの日数を計算して余りを取る

$$[\text{曜日/ようび}] \equiv ([\text{基準日/きじゅんび}]\text{の}[\text{曜日/ようび}]\text{の}[\text{番号/ばんごう}]) + ([\text{経過/けいか}][\text{日数/にっすう}]) \pmod 7$$

3.2 複合周期：CRT を使用する

法が互いに素なら CRT で連立合同式を解く。

4 厳密な説明

4.1 1. 曜日の計算（mod 7）

基本手順：

1. 基準日の曜日を数値化する（日曜を 0、月曜を 1、…、土曜を 6 など）
2. 目標日までの日数 d を計算する
3. ([基準/きじゅん][曜日/ようび]) $+ d \pmod 7$ を計算する

月の日数の規則：

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
日数	31	28/29	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

閏年の判定：4 の倍数かつ（100 の倍数でない または 400 の倍数）。

例：2026 年 1 月 1 日の曜日。

基準：2000 年 1 月 1 日は土曜日（= 6）。

2000 年 1 月 1 日から 2026 年 1 月 1 日まで：26 年 + 閏年 日数。

26 年の日数：$26 \times 365 = 9490$。閏年：$2000, 2004, \cdots, 2024 \to 7$ 回。合計 $d = 9490 + 7 = 9497$。

$9497 \div 7 = 1356$ 余り 5。

$6 + 5 = 11 \equiv 4 \pmod 7$。木曜日（木 = 4 と設定した場合）。

4.2 2. ツェラーの公式（Zeller's congruence）

y 年 m 月 d 日の曜日 h（0 = 土、1 = 日、…、6 = 金）を与える公式：

$$h = \left(d + \left\lfloor \frac{13(m+1)}{5} \right\rfloor + K + \left\lfloor \frac{K}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{J}{4} \right\rfloor - 2J\right) \bmod 7$$

ここで $m \geq 3$（1, 2 月は前年の 13, 14 月として扱う）、$K = y \bmod 100$（年の下 2 桁）、$J = \lfloor y/100 \rfloor$（世紀）。

公式の意味：各項は日・月の補正・年の余り・閏年の補正・世紀の補正を合計した累積日数の mod 7 である。

4.3 3. 干支の計算

西暦 y 年の十干（甲 0、乙 1、…）：

$$[十干/じっかん] = (y - 4) \bmod 10$$

十二支（子 0、丑 1、…）：

$$[十二支/じゅうにし] = (y - 4) \bmod 12$$

理由：西暦 4 年が甲子年であることを基準に設定（基準年は文献により異なる場合がある）。

六十干支の周期 60 は $\operatorname{lcm}(10, 12) = 60$。これは CRT を使う場合と異なり（$\gcd(10, 12) = 2 \neq 1$）、十干と十二支の組み合わせは 60 通りのうち 30 通りしか実現しない（偶奇が一致する組み合わせのみ）。

4.4 4. 複合周期の問題（CRT の応用）

「日曜日かつ満月（朔望月 ≈ 29.5 日 → 近似して 29 日周期と仮定）の次はいつか」：

$$d \equiv 0 \pmod 7, \quad d \equiv r \pmod{29}$$

$\gcd(7, 29) = 1$ なので CRT より $d \pmod{203}$ に一意の解がある。
実際の天文計算では朔望月（29.53 日）を有理近似し、連分数で良い近似分数を求めてから合同式を使用する（メトン周期 19 年 = 235 朔望月はこうして発見された）。

5 見分け方

- 曜日問題 → mod 7 で日数を管理
- 干支問題 → mod 10 と mod 12 の組み合わせ（周期 60）
- 複数の周期が絡む → 法が互いに素なら CRT、そうでなければ lcm で周期を求める
- 正確な年代計算 → 閏年 の補正を忘れない

6 どこまで成り立つか

ツェラーの公式はグレゴリオ暦に対して有効（ユリウス暦では係数が異なる）。実際の天文計算では朔望月が整数でないため合同式のみでは不十分—連分数や連続分数近似との組み合わせが必要になる。

7 最終形

$$\boxed{[\text{曜日/ようび}] \equiv ([\text{基準/きじゅん}][\text{曜日/ようび}]) + ([\text{経過/けいか}][\text{日数/にっすう}]) \pmod 7}$$

$$\boxed{[\text{十干/じっかん}] = (y-4) \bmod 10, \quad [\text{十二支/じゅうにし}] = (y-4) \bmod 12, \quad [\text{干支/えと}][\text{周期/しゅうき}] = 60}$$

8 一言でいうと

調日算は暦の周期性を mod 演算に翻訳する技術であり、複合周期には中国剰余定理・単一周期には直接の mod 計算が対応する。

9 関連リンク

→ 講義 **中国剰余定理** lecture math number-theory
https://study.bem130.com/lecture/math/number-theory/中国剰余定理-講義/

→ 講義 **合同式と mod 演算の基本** lecture math abstract-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/abstract-algebra/合同式と mod 演算の基本-講義/

→ 講義 **連分数展開** lecture math number-theory
https://study.bem130.com/lecture/math/number-theory/連分数展開-講義/