連分数展開

1　導入

この講義の核心は、**連分数はユークリッド互除法を「逆から読む」ものであり、実数を有理数で近似するときの「最良近似」を与える**ことである。

$\sqrt{2}$、π、e といった無理数を分数で近似するとき、「分母がこの大きさ以下でこれ以上近い分数はない」という最良近似が系統的に得られる。これが連分数の威力である。

2　用語と定義

2.1　連分数
Continued fraction

連分数 とは、以下の 形 の 表現 である：
Continued fraction

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

記法：$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$

ここで $a_0 \in \mathbb{Z}$、$a_i \in \mathbb{Z}_{>0}$（$i \geq 1$）。各 a_i を**部分商**（partial quotient）という。

「**連」という命名**：分数の中にさらに分数が連なる構造から命名。continued（続く）の訳。

2.2　収束分数
Convergent

n 番目の収束分数（漸近分数とも）は
Convergent

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$$

有限で打ち切った連分数の値であり、x への最良有理近似を与える。

2.2.1　連分数の分類

種類	定義	例
有限連分数	$a_i = 0$（$i > N$）で打ち切れる	有理数のみ
無限連分数（非循環）	部分商が非周期的	$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots]$
無限連分数（循環）	部分商が周期的	$\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$、$\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$

基本定理：実数 x が無理数であるための 必要十分条件 は、連分数展開が無限に続くことである。また x が 2 次無理数（$ax^2 + bx + c = 0$ の有理係数解）であることと循環連分数になることは同値である（ラグランジュの定理）。

3 方針

有理数の場合はユークリッド互除法の商の列がそのまま連分数の部分商になる。無理数の場合は整数部分を取り続けるアルゴリズムで展開する。

4 厳密な説明

4.1 1. 有理数の連分数展開（ユークリッド互除法との双対）

p/q（$p, q \in \mathbb{Z}$、$q > 0$）の展開：

$$p = a_0 q + r_1 \Longrightarrow a_0 = \lfloor p/q \rfloor$$

$$q = a_1 r_1 + r_2 \Longrightarrow a_1 = \lfloor q/r_1 \rfloor$$

$$r_1 = a_2 r_2 + r_3 \Longrightarrow a_2 = \lfloor r_1/r_2 \rfloor$$

余りが 0 になったところで終了。ユークリッド互除法の余りの列が逆数で積み上がった構造になっている。

例：43/30 を展開する。

$$43 = 1 \cdot 30 + 13 \Longrightarrow a_0 = 1$$

$$30 = 2 \cdot 13 + 4 \Longrightarrow a_1 = 2$$

$$13 = 3 \cdot 4 + 1 \Longrightarrow a_2 = 3$$

$$4 = 4 \cdot 1 + 0 \Longrightarrow a_3 = 4$$

したがって $43/30 = [1; 2, 3, 4]$。

4.2 2. 無理数の連分数展開

$x = \sqrt{2}$ の場合：

$$a_0 = \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1, \quad a_1 = \left\lfloor \sqrt{2} + 1 \right\rfloor = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{(\sqrt{2} + 1) - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 \Longrightarrow a_2 = 2, \ldots$$

以下同様に $a_i = 2$（$i \geq 1$）が続く。$\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$。

4.3 3. 収束分数の漸化式

$$p_{-1} = 1, \quad p_0 = a_0; \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1; \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

隣接する収束分数の差：

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$$

この恒等式は一次不定方程式 $ax+by=1$ の解を自動的に与える。

4.4 4. 最良近似の意味

p/q が x の収束分数であるならば、$q' \le q$ を満たす任意の有理数 p'/q'（$p'/q' \ne p/q$）に対して

$$|\, x - p/q \,| \le |\, x - p'/q' |$$

つまり収束分数は「分母がこれ以下の分数の中で最良の近似」を与える。

4.5 5. 黄金比と連分数

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1;\overline{1}] = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$$

部分商がすべて 1 であることから、黄金比は「有理数で最も近似しにくい」無理数である（最悪近似数）。フィボナッチ数列の隣接比が黄金比に収束するのは、フィボナッチ数列が $[1;\overline{1}]$ の収束分数の分子・分母の列そのものだからである。

5 見分け方

- 有理数の近似問題 → 収束分数が最良近似を与える
- 「分母 $\le N$ で最も近い分数は？」→ 連分数展開して収束分数を列挙する
- 循環連分数 → 2 次無理数（$\sqrt{n}$ 型）
- $ax+by=1$ を解く → 隣接収束分数の差 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ を利用

6 どこまで成り立つか

連分数展開は実数に適用できる。複素数への一般化（ガウス整数の連分数）も存在するが複雑になる。収束の速さは部分商の大きさに依存し、部分商が大きいほど速く収束する。

7 最終形

$$\boxed{x = [a_0; a_1, a_2, \ldots], \quad a_i = \lfloor x_i \rfloor, \quad x_{i+1} = \tfrac{1}{x_i - a_i}}$$

$$\boxed{p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

$$\boxed{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}}$$

8　一言でいうと

連分数はユークリッド互除法を逆から読む表現であり、有理数による最良近似の系統的な構成法を与える。

9　関連リンク

→ 講義 **ユークリッドの互除法と一次不定方程式** lecture math algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/ユークリッドの互除法と一次不定方程式-講義/

→ 講義 **中国剰余定理** lecture math number-theory
https://study.bem130.com/lecture/math/number-theory/中国剰余定理-講義/