

# Fourier 変換と PDE

## 1 導入

このページの核心は、Fourier 変換により空間微分を周波数の積へ変換し、PDE を周波数ごとの問題へ分解することである。

## 2 方針

全空間や周期性のない問題では、Fourier 級数より Fourier 変換が適合する。微分は周波数変数の乗算へ移行するため、熱方程式や波動方程式を周波数ごとに解析できる。

## 3 微分が乗算になる理由

Fourier 変換を

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx$$

で定義する。関数が十分に減衰し、部分積分の境界項が 0 になると仮定する。このとき

$$\hat{f}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-ix\xi} dx$$

である。部分積分により

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-ix\xi} dx = [f(x)e^{-ix\xi}]_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx$$

となる。境界項が 0 なら

$$\hat{f}'(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$$

である。もう一度適用すると

$$\hat{f}''(\xi) = (i\xi)^2\hat{f}(\xi) = -\xi^2\hat{f}(\xi)$$

を得る。したがって、空間微分を含む PDE は周波数ごとの代数式または ODE へ変換される。

## 4 代表例

熱方程式  $u_t = \kappa u_{xx}$  を  $x$  で Fourier 変換すると、

$$\partial_t \hat{u} = -\kappa \xi^2 \hat{u}$$

となる。これは  $t$  に関する ODE であり、高周波ほど速く減衰することを示す。

## 5 Fourier 級数との相違

Fourier 級数は有界区間や周期関数を離散的な周波数へ分解する。Fourier 変換は全空間の関数を連続的な周波数へ分解する。境界がある問題では Fourier 級数、全空間では Fourier 変換が自然である。

## 6 heat kernel への接続

初期条件  $u(x, 0) = f(x)$  の Fourier 変換を  $\hat{f}(\xi)$  とすると、

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\kappa\xi^2 t} \hat{f}(\xi)$$

である。逆変換すると、解は heat kernel と  $f$  の畳み込みで表現される。これは初期分布が Gaussian 核で平均化されることを意味する。

heat kernel の式は、Gaussian の Fourier 変換から導出される。逆変換の定数を

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

とする規約では、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\kappa t \xi^2} e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-x^2/(4\kappa t)}$$

である。この積分は平方完成と Gaussian 積分により計算される。したがって  $e^{-\kappa t \xi^2}$  の逆変換が heat kernel になる。

## 7 全空間の熱方程式を解く

問題を

$$u_t = \kappa u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = f(x)$$

とする。未知関数は  $u(x, t)$ 、独立変数は空間  $x$  と時間  $t$ 、定義域は全実線である。Fourier 変換を  $x$  に関して適用すると、空間微分は

$$\widehat{u_{xx}}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t)$$

へ移行する。したがって周波数ごとに

$$\partial_t \hat{u}(\xi, t) = -\kappa \xi^2 \hat{u}(\xi, t), \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$$

を解けばよい。解は

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\kappa \xi^2 t} \hat{f}(\xi)$$

である。逆変換により

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(4\kappa t)} f(y) dy$$

となる。核

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-x^2/(4\kappa t)}$$

が heat kernel である。

## 8 比較例: 境界がある場合

区間  $0 < x < L$  で Dirichlet 条件を課すと、全空間の平行移動対称性は失われる。この場合、連続周波数  $\xi$  ではなく、境界条件に適合する離散モード  $\sin(n\pi x/L)$  を使用する。Fourier 変換と Fourier 級数の選択は、領域と境界条件で決まる。

## 9 反例または限界

係数が  $x$  に依存する  $u_t = (a(x)u_x)_x$  では、Fourier 変換を適用しても単純な乗算には変換されない。畳み込みや擬微分作用素が現れるため、定数係数の場合と同じ手順では完結しない。

## 10 どこまで成り立つか

Fourier 変換は領域や境界条件に強く依存する。有界区間では、Fourier 級数や固有関数展開が自然になる。

## 11 関連リンク

→ [講義](#) フーリエ変換の入口 [lecture](#) [math](#) [analysis](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/フーリエ変換の入口-講義/>