Green 関数の入口

1 導入

このページの核心は、線形 PDE の解を、点源に対する応答の重ね合わせとして構成することである。

2 用語と定義

Green 関数 は、演算子 L に対して $LG=\delta$ を満たす基本応答である。ここで δ は点源を 表 すデルタ関数である。

3 方針

線形性により、一般の 入力 は点源の連続的な重ね合わせとして 扱 える。Green 関数が既知なら、解は畳み込みや積分で表現される。

4 注意

Green 関数は方程式だけでなく、領域 と 境界条件 に依存する。同じ微分演算子であっても、境界条件 が異なれば Green 関数も異なる。

5 一次元 Poisson 問題

区間 $0<x<1$ で

$$-u''(x)=f(x),\qquad u(0)=u(1)=0$$

を 考 える。Green 関数 $G(x,\xi)$ は、$x=\xi$ で 傾 きが跳び、境界で 0 になる折線として構成される。解は

$$G(x,\xi)=\begin{cases}x(1-\xi), 0\le x\le\xi,\\ \xi(1-x), \xi\le x\le 1\end{cases}$$

である。この式は、$x=0,1$ で 0 になり、$x=\xi$ で連続であり、 傾 きの跳びにより $-G_{xx}=\delta(x-\xi)$ を 表 す。右辺 f を点源の重ね合わせと 解釈 すると、

$$u(x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$$

で 表現 される。これは各点 ξ の点源への応答を重ね合わせる式である。

6 Green 関数の式を 導出 する

$x\neq\xi$ では点源がないため、$-G_{xx}=0$ である。したがって G は $x<\xi$ と $x>\xi$ の 両側 で一次関数になる。

境界条件 $G(0,\xi)=G(1,\xi)=0$ を満たすように

$$G(x,\xi)=\begin{cases}Ax, & 0\le x\le \xi,\\ C(1-x), & \xi\le x\le 1\end{cases}$$

と置く。$x=\xi$ で連続であるため

$$A\xi = C(1-\xi)$$

が必要である。さらに $-G_{xx}=\delta(x-\xi)$ を $\xi-\varepsilon$ から $\xi+\varepsilon$ まで積分すると

$$-G_x(\xi+,\xi)+G_x(\xi-,\xi)=1$$

を得る。ここで $G_x(\xi-,\xi)=A$、$G_x(\xi+,\xi)=-C$ だから

$$A+C=1$$

である。連続条件と 跳躍条件 を連立して解くと

$$A=1-\xi,\qquad C=\xi$$

となる。よって

$$G(x,\xi)=\begin{cases}x(1-\xi), & 0\le x\le \xi,\\ \xi(1-x), & \xi\le x\le 1\end{cases}$$

が導出される。

7 具体例: 一定荷重

$f(\xi)=1$ の場合、解は

$$u(x)=\int_0^1 G(x,\xi)\,d\xi=\frac{x(1-x)}{2}$$

である。これは $-u''=1$、$u(0)=u(1)=0$ を満たす。直接積分でも同じ解を得るが、Green 関数を使用すると任意の右辺 f に対して同一の核を再利用できる。

8 図式としての畳み込み

全空間で平行移動対称性がある場合、Green 関数は $G(x-\xi)$ の形になり、解は畳み込み $G*f$ で表現される。境界がある場合は、x と ξ を別々に扱う $G(x,\xi)$ が必要である。この差が fundamental solution と Green 関数の実用上の相違である。

9 fundamental solution との相違

基本解 (Fundamental solution) は全空間での点源応答である。Green 関数は領域と 境界条件 を反映した点源応答である。したがって Green 関数の方が境界値問題に適合する。

10 関連リンク

→ 講義 ステップ関数・デルタ関数・畳み込み lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/ステップ関数・デルタ関数・畳み込み-講義/