heat・wave・Laplace 方程式

1 導入

このページの核心は、PDE の代表例を別々の公式としてではなく、拡散・伝播・平衡の三類型として比較することである。

2 代表式

熱方程式は

$$u_t = \kappa u_{xx}$$

である。波動方程式は

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

である。Laplace 方程式は

$$\Delta u = 0$$

である。

3 方針

熱方程式では初期分布が平滑化される。波動方程式では初期変位と初期速度が伝播する。Laplace 方程式では境界値が内部の平衡分布を決定する。

4 heat: 平滑化と maximum principle

熱方程式では、高周波の揺れが時間とともに減衰する。たとえば $0 < x < L$、$u(0,t) = u(L,t) = 0$ の条件では、正弦モード $\sin(n\pi x/L)$ が $e^{-\kappa(n\pi/L)^2 t}$ で減衰する。大きい n ほど速く消えるため、解は滑らかになる。この減衰公式は代入で導出できる。$u(x,t) = T(t)\sin(n\pi x/L)$ と置くと、

$$u_t = T'(t)\sin(n\pi x/L)$$

であり、

$$u_{xx} = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T(t)\sin(n\pi x/L)$$

である。これを $u_t = \kappa u_{xx}$ へ代入すると

$$T'(t) = -\kappa\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T(t)$$

となる。この一階線形 ODE の解は

$$T(t) = T(0)e^{-\kappa(n\pi/L)^2 t}$$

である。したがって正弦モードの減衰が導出される。

標準例として、初期温度を $u(x,0) = \sin(\pi x/L)$ とする。このとき解は

$$u(x,t) = e^{-\kappa(\pi/L)^2 t} \sin(\pi x/L)$$

である。形は保たれるが、振幅だけが指数関数的に減衰する。比較例として $\sin(5\pi x/L)$ を初期分布に含めると、減衰率は 25 倍になる。これが平滑化の具体的な意味である。

5 wave: 伝播と energy

波動方程式では、初期変位と初期速度が有限速度で伝播する。固定端条件では正弦モードが振動し、熱方程式のように単調に消滅しない。運動と歪みのエネルギーの和が保存されることが基本性質である。

全空間の一階元では、d'Alembert 公式

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

が典型である。ここで f は初期変位、g は初期速度である。点 (x,t) の解は、区間 $[x-ct, x+ct]$ の初期情報だけに依存する。これが有限伝播速度の式による表現である。

この公式も因数分解から導出できる。波動演算子は

$$\partial_t^2 - c^2\partial_x^2 = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)$$

と分解される。新変数

$$\xi = x - ct, \qquad \eta = x + ct$$

を導入すると、一般解は

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

の形になる。初期条件 $u(x,0) = f(x)$、$u_t(x,0) = g(x)$ を代入すると

$$F(x) + G(x) = f(x)$$

および

$$-cF'(x) + cG'(x) = g(x)$$

を得る。第二式を積分して F, G を消去すると、d'Alembert 公式

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

が得られる。

6 Laplace: 平衡と調和関数

Laplace 方程式 $\Delta u = 0$ の解は調和関数である。内部に源がないため、境界で指定した値が内部の平衡状態を決定する。maximum principle により、最大値と最小値は原則として境界で達成される。

二次元の例として $u(x,y) = x^2 - y^2$ を確認する。$u_{xx} = 2$、$u_{yy} = -2$ なので $\Delta u = 0$ である。値は内部で自由に最大を取るのではなく、境界の情報と調和性に制約される。反対に $x^2 + y^2$ は $\Delta u = 4$ であり、内部に一様な源を持つ Poisson 方程式の例になる。

7 比較表

方程式	未知関数	主な条件	解の読み方
heat	$u(x,t)$	初期温度と境界温度	拡散と平滑化
wave	$u(x,t)$	初期変位と初期速度	伝播とエネルギー
Laplace	$u(x,y)$	境界値	平衡と調和性

8 条件による違い

同じ熱方程式であっても、Dirichlet 条件では端点の温度を固定し、Neumann 条件では端点を通過する熱流を指定する。結果として長時間後の平衡が変化する。このページでは解法を完結させず、三方程式の性質の差を確認する。

9 単位の確認

熱方程式で u を温度、t を秒、x を長さとすると、κ は長さの 2 乗を時間で割った次元を持つ。したがって u_t と κu_{xx} は同じ次元になる。

10 どこまで成り立つか

これらは線形で理想化された代表モデルである。非線形拡散、減衰、外力、不均一媒質を含む場合は、方程式の形が変化する。

11 関連リンク

→ 講義 変数分離法と Fourier 級数 lecture math partial-differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/変数分離法と Fourier 級数-講義/