transport 方程式と保存則

1 導入

このページの核心は、transport 方程式を量が流れに沿って移動する式として確認し、保存則への入口を作ることである。

2 基本形

$$u_t + cu_x = 0$$

は一定速度 c で形状が移動する transport 方程式である。特性曲線 $x - ct = \text{constant}$ に沿って u は保存される。

初期条件を $u(x,0) = g(x)$ とすると、解は

$$u(x,t) = g(x - ct)$$

である。正の c なら波形は右へ速度 c で移動する。熱方程式のように形が滑らかに崩れるのではなく、初期形状が平行移動することが特徴である。

3 保存則

保存則 Conservation law は、

$$u_t + f(u)_x = 0$$

の形を持つ PDE である。これは量の時間変化が流束の空間変化で決定されることを表す。

4 積分形から PDE へ

区間 $[a,b]$ に含まれる量を $\int_a^b u(x,t)\,dx$ とする。保存される量の変化は、端点から出入りする流束で決定されるため、

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = f(u(a,t)) - f(u(b,t))$$

となる。これを局所化すると $u_t + f(u)_x = 0$ を得る。

5 有限伝播速度

transport 方程式では、初期分布の情報が特性曲線に沿って移動する。この性質は熱方程式の拡散と対照的である。不連続初期値がある場合は、不連続も特性に沿って伝播する。

6 非線形保存則と特性の交差

$u_t + f(u)_x = 0$ は $u_t + f'(u)u_x = 0$ と書ける。値 u により特性速度 $f'(u)$ が変化するため、大きい値と小さい値が異なる速度で進む。特性が交差すると古典解は破綻し、衝撃波を含む弱解が必要になる。不連続が速度 s で移動し、左状態を u_L、右状態を u_R とすると、Rankine–Hugoniot 条件は

$$s = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R}$$

である。この条件は保存量の収支から導かれる。ただし物理的に許容される弱解を選ぶには、entropy 条件も必要である。

7 図式による確認

定係数 transport では、特性曲線は $x - ct = \text{constant}$ の平行線である。非線形保存則では、特性の傾きが u に依存する。扇状に広がれば rarefaction、交差すれば shock が発生する。この図式は特性曲線法と保存則を接続する。

→ 講義 **特性曲線法** lecture math partial-differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/特性曲線法-講義/

8 どこまで成り立つか

非線形保存則では、特性曲線が交差し、衝撃波が発生することがある。その場合は弱解とエントロピー条件が必要になる。

9 関連リンク

→ 講義 **特性曲線法** lecture math partial-differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/特性曲線法-講義/