二階線形 PDE の分類

1 導入

このページの核心は、二階線形 PDE を係数の形で分類し、拡散・平衡・波動という性質に対応させることである。

2 用語と定義

楕円型 Elliptic equation は、Laplace 方程式のように平衡状態を記述する型である。
放物型 Parabolic equation は、熱方程式のように拡散を記述する型である。
双曲型 Hyperbolic equation は、波動方程式のように伝播を記述する型である。

3 方針

分類は解法の名前ではなく、情報の伝わり方を示す。楕円型では境界条件が中心になり、放物型では時間発展により平滑化が発生し、双曲型では有限速度の伝播が現れる。

4 代表例

- Laplace 方程式 $\Delta u = 0$ は楕円型である。
- 熱方程式 $u_t = \kappa u_{xx}$ は放物型である。
- 波動方程式 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ は双曲型である。

5 何を最初に判別するか

二階線形 PDE では、まず最高階の微分項だけを抽出する。低階項や外力項は解の具体形に影響するが、型の診断は主部で決まる。次に、変数を固定し、係数 A, B, C が点ごとに何を示すかを確認する。

型	解の性質	条件の中心	典型解法
楕円型	内部が境界に支配される	境界条件	maximum principle, Green 関数
放物型	時間とともに平滑化する	初期条件と境界条件	Fourier 展開, energy method
双曲型	有限速度で伝播する	初期変位と初期速度	特性, energy method

6 判別式の由来

二変数の二階主部

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy}$$

を確認する。この二次形式の符号構造が分類を決定する。判別量 $B^2 - AC$ が負なら楕円型、0 なら放物型、正なら双曲型である。

Laplace 方程式 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ では $A = 1, B = 0, C = 1$ なので $B^2 - AC = -1$ であり楕円型である。波動方程式 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ は変数を (x, t) と考えると符号が異なる二階項を持ち、双曲型になる。

この判別量は二次方程式の判別式と同じ構造から現れる。主部を行列

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

に対応させると、二階微分の符号構造は二次形式

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$$

で表される。座標変換で交差項を消去したとき、この二次形式が同符号の二方向を持つか、零方向を持つか、異符号の二方向を持つかが型を決定する。

特性方向からも同じ判別式が出る。曲線の傾きを $m = dy/dx$ とすると、主部の特性方程式は

$$Am^2 - 2Bm + C = 0$$

の形になる。この二次方程式の判別式は

$$(-2B)^2 - 4AC = 4(B^2 - AC)$$

である。したがって、実特性方向が二本ある場合は双曲型、重複する場合は放物型、実特性方向が存在しない場合は楕円型となる。

7 標準形への入口

分類は、座標変換により主部を簡単な形へ近づける発想にも接続する。楕円型では $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$、放物型では $u_{\xi\xi}$、双曲型では $u_{\xi\eta}$ のような標準形が目標になる。完全な変換計算は別項の内容だが、ここで重要なのは、判別式が座標の選び方ではなく主部の幾何を反映する量であることだ。

8 反例または限界

係数が場所で変化する方程式では、領域全体で型が一定とは限らない。たとえば $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ は、$y > 0$ と $y < 0$ で主部の符号構造が変化する。このような場合、一点の判定だけで問題全体の解法を決定してはならない。

9 分類の利点

分類は解法と期待される性質を案内する。楕円型では境界値問題と maximum principle、放物型では時間発展と平滑化、双曲型では特性とエネルギーが中心になる。つぎに三類型の代表例を比較する。

→ 講義 heat・wave・Laplace 方程式 lecture math partial-differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/heat・wave・Laplace 方程式-講義/

10 よくある誤り

- 分類を記号上の名称として暗記し、解の性質との対応を確認しない。
- 境界条件と初期条件の役割を型ごとに区別しない。
- 係数が変化する場合に、一点の分類だけで全体を即断する。

11 関連リンク

→ 講義 **heat・wave・Laplace 方程式** lecture math partial-differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/heat・wave・Laplace 方程式-講義/