

へんびぶんほうていしき 偏微分方程式ポータル

1 導入

このポータルの核心は、PDE を ODE の末尾に置くのではなく、未知関数が複変数に依存する方程式として独立に分類することである。

2 方針

まず未知関数・独立変数・定義域を確認する。つぎに初期条件と境界条件を区別する。そのうえで特性曲線・型分類・変数分離・Fourier 級数の役割を配置する。

3 このトラックの責務

常微分方程式トラックでは、一変数の時間発展と初期値問題を中心に扱う。多変数微積分トラックでは、偏微分や重積分そのものの定義と計算を整備する。ベクトル解析トラックでは、 $\text{grad} \cdot \text{div} \cdot \text{curl}$ と境界積分の関係を主題にする。

このトラックの責務は、それらを前提にして、heat・wave・Laplace・transport のような代表 PDE を分類し、条件の置き方と解法の選択を整理することである。したがって、偏微分の導出や Green・Gauss・Stokes の詳細証明はここでは主題にしない。

4 到達目標

このトラックの到達目標は三段階である。第一に、PDE の式から未知関数・独立変数・条件を抽出できること。第二に、heat・wave・Laplace の代表モデルを分類し、どの性質を調査すべきかを判断できること。第三に、Fourier 解析・energy method・Green 関数がどの問題に適合するかを説明できることである。

5 必要前提

- 偏微分: PDE の各項が何を測るかを確認するために必要である。
- 重積分: energy method や保存則で領域全体の量を扱うために必要である。
- Fourier 級数: 有界区間の境界値問題を固有関数展開へ移行するために必要である。
- 常微分方程式: 変数分離法で PDE を ODE 群へ分解するために必要である。

6 最初に確認する五項目

- 未知関数は $u(x, t)$ のような時間発展量か、 $u(x, y)$ のような平衡量か。

2. 定義域は全空間か、有界領域か。
3. 条件は初期条件か、境界条件か、あるいはその両方か。
4. 方程式は一次か二階か、線形か非線形か。
5. 目的は明示解の構成か、一意性・安定性・保存則の確認か。

この五項目を先に固定すると、特性曲線法・変数分離法・Fourier 変換・Green 関数・energy method の選択が外形暗記になりにくい。

7 読解経路

最短ルートでは、PDE とは何か、初期値問題と境界値問題、heat・wave・Laplace、変数分離法の順に確認する。理論重視ルートでは、二階線形 PDE の分類、maximum principle、energy method、Green 関数へ進行する。物理応用ルートでは、heat・wave・Laplace から流束・保存則・Fourier 変換へ接続する。最短ルートが答える疑問は、「この PDE は何を表し、条件をどう置き、どの代表的解法へ進むか」である。理論重視ルートが答える疑問は、「明示解が書けなくても、解の一意性や安定性をどう示すか」である。物理応用ルートが答える疑問は、「熱・波・静電場の現象差が式の型にどう現れるか」である。

8 各ページの役割

PDE とは何か、というページは未知関数・独立変数・定義域・条件を抽出する入口である。初期値問題と境界値問題は、時間発展と空間拘束の差を整理する。特性曲線法は一次 PDE で情報が移動する経路を追跡する。二階線形 PDE の分類は、二階主部から解の性質を診断する。heat・wave・Laplace のページは代表モデルの性質比較を担当する。変数分離法と Fourier 級数は有界区間の境界値問題を固有値問題へ変換する。Fourier 変換と PDE は全空間の問題で微分を掛け算へ変換する。maximum principle、energy method、Green 関数は、解を明示できない場合にも一意性・安定性・応答を調査するための道具である。

9 判別の順序

第一に、 u が $u(x, t)$ か $u(x, y)$ かを確認する。第二に、時間を含む発展問題か、時間を含まない平衡問題かを区別する。第三に、領域が全空間か有界領域かを確認する。この順序を固定すると、Fourier 変換、Fourier 級数、Green 関数の使い分けが明確になる。

10 読解例 どっかいれい

熱伝導を目的にする場合は、heat・wave・Laplace の比較から変数分離法、maximum principle、Fourier 変換へ進行する。波動を目的にする場合は、初期値問題、energy method、transport 方程式を優先する。静電ポテンシャルを目的にする場合は、Laplace 方程式、Green 関数、maximum principle を連続して確認する。

11 学習順序 がくしゅうじゆんじよ

→ [講義](#) PDE とは何か [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/PDEとは何か-講義/>

→ [講義](#) 初期値問題と境界値問題 [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/初期値問題と境界値問題-講義/>

→ [講義](#) 特性曲線法 [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/特性曲線法-講義/>

→ [講義](#) 二階線形 PDE の分類 [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/二階線形 PDE の分類-講義/>

→ [講義](#) heat・wave・Laplace 方程式 [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/heat・wave・Laplace方程式-講義/>

→ [講義](#) 変数分離法と Fourier 級数 [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/変数分離法と Fourier 級数-講義/>

→ [講義](#) Fourier 変換と PDE [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/Fourier変換と PDE-講義/>

→ [講義](#) maximum principle の基本 [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/maximum principle の基本-講義/>

→ [講義](#) energy method の入口 [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/energy method の入口-講義/>

→ [講義](#) Green 関数の入口 [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/Green 関数の入口-講義/>

→ [講義](#) transport 方程式と保存則 [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/transport 方程式と保存則-講義/>

12 接続 せつぞく

PDE は多変数微積分・ベクトル解析・Fourier 解析・物理数学を接続する。熱方程式は拡散、波動方程式は伝播、Laplace 方程式は平衡を表す。

→ [講義](#) [多変数微積分ポータル](#) [lecture](#) [math](#) [multivariable-calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/multivariable-calculus/多変数微積分ポータル-講義/>

13 かんれん 関連リンク

→ [講義](#) [微分方程式ポータル](#) [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/微分方程式ポータル-講義/>

→ [講義](#) [ベクトル解析ポータル](#) [lecture](#) [math](#) [vector-calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector-calculus/ベクトル解析ポータル-講義/>

→ [講義](#) [フーリエ変換の入口](#) [lecture](#) [math](#) [analysis](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/フーリエ変換の入口-講義/>