

# PDE の初期値問題と境界値問題

## 1 導入

このページの核心は、PDE では方程式だけでなく、時間方向の条件と空間境界の条件を明確に区別することである。

## 2 用語と定義

初期条件 は、時間の出発時刻で未知関数や時間微分を指定する条件である。  
境界条件 は、空間領域の境界で未知関数や法線微分を指定する条件である。

## 3 方針

時間発展を扱う問題では初期条件が中心になる。有界領域で空間分布を決定する問題では境界条件が中心になる。熱方程式や波動方程式では両方が同時に現れる。

## 4 代表的な境界条件

- Dirichlet 条件: 境界で値を指定する。
- Neumann 条件: 境界で法線微分を指定する。
- Robin 条件: 値と法線微分の線形結合を指定する。

## 5 条件の配置

時間発展の問題では、初期条件は時刻  $t = 0$  の断面に置かれる。境界条件は空間領域の端や境界面に置かれる。したがって熱方程式では、初期分布が時間の出発点を指定し、境界条件が外部との交換を指定する。

## 6 比較例

一次元の熱方程式  $u_t = \kappa u_{xx}$  を  $0 < x < L$  で考える。 $u(x, 0) = f(x)$  は初期分布を指定する。一方、 $u(0, t) = u(L, t) = 0$  は両端を固定温度にする Dirichlet 条件である。初期条件を変更すると出発時点の分布が変化し、境界条件を変更すると長時間後の平衡や熱の流出入が変化する。  
波動方程式  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  では、 $u(x, 0) = f(x)$  だけでは不足する。初期速度  $u_t(x, 0) = g(x)$  も必要である。これは時間について二階の方程式であるため、位置と速度の両方が時間発展を決定するからである。

## 7 三つのモデル

熱棒モデルでは、Dirichlet 条件は端点を恒温槽へ接続することを表す。Neumann 条件は断熱や熱流束の指定を表す。Robin 条件は外気との熱交換を表す。

弦モデルでは、Dirichlet 条件は端を固定すること、Neumann 条件は端の傾きや力の条件を指定することに対応する。

静電ポテンシャルでは、Dirichlet 条件は導体境界の電位を指定し、Neumann 条件は境界を通過する電場の法線成分を指定する。

## 8 物理的な意味

Dirichlet 条件は境界の値を外部から固定する条件である。Neumann 条件は境界を通過する流束や熱流を指定する条件である。Robin 条件は外界との交換を含む条件として現れる。

## 9 一意性への接続

PDE では条件が不足すると解が一意に決定しない。逆に、条件を過剰に指定すると解が存在しない場合がある。この均衡を確認するため、代表方程式の性質を確認する。

→ [講義 heat · wave · Laplace 方程式](#) [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/heat · wave · Laplace 方程式-講義/>

## 10 よくある誤り

- 初期条件と境界条件を同一視する。
- 方程式だけで解が一意に決定すると仮定する。
- 境界の向きや法線方向を確認せず Neumann 条件を適用する。

## 11 関連リンク

→ [講義 heat · wave · Laplace 方程式](#) [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/heat · wave · Laplace 方程式-講義/>