変数分離法と Fourier 級数

1 導入

このページの核心は、変数分離法を形式的な仮定ではなく、境界条件に合う空間モードへ PDE を分解する方法として確認することである。

2 用語と定義

変数分離法 (Separation of variables) は、$u(x,t) = X(x)T(t)$ のように未知関数を一変数関数の積として仮定し、PDE を ODE 群へ分解する方法である。

Fourier 級数 (Fourier series) は、関数を三角関数の級数として展開する表現である。

3 方針

境界条件から空間方向の固有値問題が現れる。その固有関数を基底として初期条件を展開し、時間方向の ODE を解く。

4 分離定数が現れる理由

$u(x,t) = X(x)T(t)$ を代入して両辺を XT で割ると、一方は x だけの関数、他方は t だけの関数になる。この二つが全ての x, t で等しいためには、同一の定数でなければならない。この定数が分離定数である。

5 典型例

区間 $0 < x < L$ の熱方程式で $u(0,t) = u(L,t) = 0$ とすると、空間モードは $\sin(n\pi x/L)$ になる。初期分布を sine 級数で展開し、それぞれのモードが時間とともに減衰する。

波動方程式で同じ境界条件を課すと、空間モードは同じく $\sin(n\pi x/L)$ になる。ただし時間方向は指数減衰ではなく、$\cos(cn\pi t/L)$ と $\sin(cn\pi t/L)$ の振動になる。熱と波の差は、同じ空間固有値に対する時間方程式の差として現れる。

6 具体例 1: 熱方程式

問題を

$$u_t = \kappa u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x)$$

とする。$u = XT$ を代入すると、

$$\frac{T'}{\kappa T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

である。境界条件から $X(0) = X(L) = 0$ なので、非零解は

$$X_n(x) = \sin(n\pi x/L), \quad \lambda_n = (n\pi/L)^2$$

である。時間方向は $T_n(t) = e^{-\kappa\lambda_n t}$ となる。初期条件は

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L), \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)\,dx$$

により決定する。したがって

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa(n\pi/L)^2 t}\sin(n\pi x/L)$$

である。

7　具体例 2: 波動方程式

同じ区間と固定端で

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)$$

を扱う。空間モードは熱方程式と同一だが、時間方程式は

$$T_{(n)''} + c^2(n\pi/L)^2 T_n = 0$$

となる。したがって

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(cn\pi t/L) + d_n\sin(cn\pi t/L))\sin(n\pi x/L)$$

である。a_n は f の sine 係数、d_n は g の sine 係数を $cn\pi/L$ で割った量である。

8　固有値問題と直交性

境界条件が空間演算子の固有値問題を作る。固定端では $-\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数が sine 関数になり、それらが直交するため初期条件を係数へ分解できる。変数分離は偶然の技巧ではなく、境界条件に適合する基底を探す手続きである。

9　限界

領域や係数が複雑で、積の形 $X(x)T(t)$ に分解できない場合がある。非線形 PDE でも重ね合わせが成立しないため、Fourier 級数による単純な展開は使用しにくい。

10　よくある誤り

- 境界条件を確認せず、任意の Fourier 展開を使用する。
- 固有値問題と Fourier 級数の関係を切断する。

- 級数解の収束や境界での挙動を確認しない。

11 関連リンク

→ 講義 **フーリエ変換の入口** lecture math analysis
https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/フーリエ変換の入口-講義/