特性曲線法

1 導入

このページの核心は、一階 PDE を適切な曲線に沿って制限すると、ODE として処理できる場合があることである。

2 用語と定義

特性曲線 Characteristic curve は、PDE の微分方向に沿って進む曲線であり、その上で偏微分方程式が ODE に還元される。

3 方針

たとえば

$$u_t + cu_x = 0$$

では、曲線 $x - ct = \mathrm{constant}$ に沿って u が保存される。解法の目的は、偏微分を曲線方向の全微分へ変換することである。

4 曲線に沿う理由

一次 PDE では、u_x と u_t が一次結合として現れる。この形は、平面 x, t 上の曲線に沿う全微分

$$\frac{d}{ds}u(x(s), t(s)) = u_x x'(s) + u_t t'(s)$$

と同じ構造を持つ。したがって、PDE の係数と $x'(s), t'(s)$ を対応させれば、偏微分の問題を曲線上の ODE へ変換できる。

5 具体例

$u_t + 2u_x = 0, \quad u(x, 0) = g(x)$ では、特性曲線は $x - 2t = \xi$ である。したがって

$$u(x, t) = g(x - 2t)$$

となる。初期形状が速度 2 で右方向へ移動する。

6 連鎖律からの導出

曲線 $(x(s), t(s))$ に沿って $u(x(s), t(s))$ を微分すると、

$$\frac{d}{ds}u(x(s), t(s)) = u_x x'(s) + u_t t'(s)$$

である。$x'(s)=c, t'(s)=1$ と選択すれば、右辺は cu_x+u_t になる。したがって $u_t+cu_x=0$ は、特性曲線に沿って u が一定であることを意味する。

7 変係数の例

$u_t+xu_x=0$ では、特性曲線は $x'=x, t'=1$ を満たす。したがって $x(t)=Ce^t$ であり、xe^{-t} が保存される。初期条件 $u(x,0)=g(x)$ なら、$u(x,t)=g(xe^{-t})$ となる。

8 非線形保存則への接続

$u_t+f(u)_x=0$ は $u_t+f'(u)u_x=0$ と書ける。値 u ごとに速度 $f'(u)$ が異なるため、特性曲線が交差する可能性がある。その場合、古典解は破綻し、弱解や entropy 条件が必要になる。

9 特性ファンの配置

定係数の transport 方程式では、特性曲線は平行な直線群である。変係数や非線形では、初期線から出る曲線群が開いたり交差したりする。この配置が解の滑らかさと一意性を左右する。

10 不適用の例

二階 PDE では、一階の方向微分を ODE へ変換する構造が直接には成立しない。たとえば熱方程式 $u_t=\kappa u_{xx}$ は拡散を含むため、単一の曲線に沿って値が保存される問題ではない。

11 どこまで成り立つか

非線形の保存則では、特性曲線が交差し、古典解が破綻することがある。この場合は弱解や衝撃波の理論が必要になる。

12 関連リンク

→ 講義 **一階微分方程式の解法診断** lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/一階微分方程式の解法診断-講義/