確率と期待値

1　導入

この講義で最重要なのは、**場合を数えることと、平均的にどれだけ得るかを分けて考えること**です。
確率の演習で混乱しやすいのは、「まず何を数えるのか」と「いま求めたいのは確率なのか期待値なのか」が曖昧なまま計算を始めてしまうことです。
確率では、まず起こりうる結果を整理し、そのうえで各結果にどれだけの重みを与えるかを決めます。期待値は、その重みつき平均です。この 2 つを最初に分けて見るだけで、問題の見通しはかなり良くなります。

2　用語と定義

確率 Probability とは、事象が起こる起こりやすさを数で表したものです。
期待値 Expected value とは、確率変数 X が $x_1, \ldots, x_n$ を取るとき

$$E[X] = x_1 P(X = x_1) + \cdots + x_n P(X = x_n)$$

で定義される量です。

3　方針

確率の問題では、まず標本空間を明確にします。そのあと等確率かどうかを判断し、場合の数で押すのか、条件付きで分解するのかを決めます。
期待値では、全部の場合を並べたうえで、それぞれの値にその起こりやすさを掛けて足します。したがって「確率を求める段階」と「平均を作る段階」を分けて考えるのが基本です。

4　直感的な説明

期待値は「実際の 1 回の結果」ではありません。しかし同じ試行を何度も繰り返したときの平均として現れます。だから確率と期待値は、未来を言い当てる道具ではなく、多数回の振る舞いを整理する道具です。
たとえば公平なさいころを 1 回振った結果は 1,2,3,4,5,6 のどれかですが、長く繰り返すと平均は 3.5 に近づきます。3.5 という目は出なくても、全体の傾向を表す数字として意味があります。

5　厳密な説明

5.1　1. 等確率なら場合の数

全体の場合の数を N、事象 A の場合の数を $n(A)$ とすると

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}$$

です。

大事なのは、この公式が「全部の結果が同じ起こりやすさを持つ」ときにしか使えないことです。ここを見落とすと、条件付き確率や偏った試行で崩れます。

5.2 2. 期待値は重みつき平均

確率変数 X が $0, 1, 2$ をそれぞれ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ の確率で取るなら

$$E[X] = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

です。

この式では、「値」と「その確率」を組にして見ることが本質です。値だけを足してもだめで、起こりやすい結果ほど強く平均に効く、という重みづけが入ります。

5.3 3. 線形性

期待値の重要な性質は、和の期待値が各項の期待値の和になることです。つまり

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

です。独立かどうかに関係なく成り立つので、演習で強力です。

ここが期待値の便利さです。和の期待値を出したいとき、分布を全部作り直さなくても、各部分の期待値を足せばよい場合が多いです。

6 具体例

6.1 1. さいころの偶数の確率

公平なさいころを 1 回振るとき、標本空間は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ です。

偶数の事象を $A = \{2, 4, 6\}$ とすると、$n(A) = 3$、全体は $N = 6$ なので

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

6.2 2. さいころの出目の期待値

X を出目とすると

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

です。

この 2 つは同じ試行でも、前者は「どれくらい起こるか」、後者は「平均的にどれくらいの値になるか」を見ています。

7 別の見方

確率は比率の言葉、期待値は平均の言葉です。数え上げの問題では組合せが主役ですが、期待値では個々の場合を全部追わずに済むことがあります。

8 見分け方

- 何通りあるか、起こる割合はどれくらいか、なら確率です。
- 平均的に何点か、何回か、なら期待値です。
- 独立や条件付きが出たら、掛け算か場合分けかを先に決めます。
- 問題文に「少なくとも」「ちょうど」「高々」が見えたら、まず事象を集合として言い直します。
- 期待値を聞かれているのに、いきなり場合を全部列挙し始めたら、値と確率の組を先に表へ整理したほうが見通しがよくなります。

9 どこまで成り立つか

等確率の公式は、全結果が同じ重みを持つときにしか使えません。偏りがあるなら、個別の確率を直接扱う必要があります。

10 最終形

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{N} \qquad (\text{等確率})}$$

$$\boxed{E[X] = \sum x_i P(X = x_i)}$$

$$\boxed{E[X+Y] = E[X] + E[Y]}$$

11 一言でいうと

- 確率は「どれくらい起こるか」、期待値は「平均的にどれだけか」です。
- 問題では、まず数えるのか、平均を見るのかを決めます。

12 関連リンク

→ 講義 条件付き確率と独立 lecture math probability
https://study.bem130.com/lecture/math/probability/条件付き確率と独立-講義/

→ 講義 統計の基本 lecture math statistics
https://study.bem130.com/lecture/math/statistics/統計の基本-講義/