差分方程式の基本

1 導入

この講義で最重要なのは、**差分方程式は連続な変化を微分方程式で書くのに対して、離散的な変化を隣り合う項の差で書く方程式だということ**です。

漸化式を学んでも、それを方程式として見る視点がないと、微分方程式との共通点が見えません。ここでは $a_{n+1} - a_n$ を離散な変化率として読みます。

2 用語と定義

差分方程式 (Difference equation) とは、数列の隣り合う項の関係を 表 す方程式です。

前進差分 (Forward difference) とは、

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

で定義される差です。

3 方針

まず $a_{n+1} - a_n$ を連続な微分の代わりに使う理由を見ます。そのあと、一次の差分方程式を変形して、等比数列や和の操作から解く流れを整理します。

→ 講義 一次漸化式 lecture math sequence
https://study.bem130.com/lecture/math/sequence/一次漸化式-講義/

→ 講義 微分方程式の入口 lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分方程式の入口-講義/

4 直感的な説明

微分方程式で $y'(x)$ が「少し動いたときの変化率」を 表 したように、差分方程式では $a_{n+1} - a_n$ が「1 歩 先 へ進んだときの増減」を 表 します。

だから差分方程式は、時間や回数が整数で進む現象を書くのに向いています。

5 厳密な説明

5.1 1. 差分を使う理由

数列では変数 n は $1, 2, 3, \cdots$ と飛び飛びに動きます。したがって微分

$$\frac{da}{dn}$$

をそのまま考えるより、

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

で変化量を見るほうが自然です。

5.2 2. 最も基本の形

$$a_{n+1} = ra_n$$

なら

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

です。これは等比数列そのものです。この式は既知の結果として覚えていてもよいですが、差分方程式として読むなら「1 歩進むごとに前の項を r 倍する」という規則が続くので、

$$a_2 = ra_1, \qquad a_3 = ra_2 = r^2 a_1, \qquad \dots$$

となり、帰納的に

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

が自然に出ます。

5.3 3. 一次非同次差分方程式

$$a_{n+1} = ra_n + b$$

を考えます。まず定数解 α を探すと

$$\alpha = r\alpha + b$$

だから

$$\alpha = \frac{b}{1-r} \qquad (r \neq 1)$$

です。定数解を探す理由は、「そこに来れば次も同じ値のまま」という基準点を見つけたいからです。その基準点からのずれだけを新しい数列として見ると、定数項 b の効果を消して同次の問題へ直せます。

そこで

$$c_n = a_n - \alpha$$

とおくと

$$c_{n+1} = a_{n+1} - \alpha = ra_n + b - \alpha = r(a_n - \alpha) = rc_n$$

となります。したがって

$$c_n = Cr^{n-1}$$

で、

$$a_n = \alpha + Cr^{n-1}$$

です。つまり非同次の問題を、平衡点を引くことで同次の問題へ直せます。

ただし $r = 1$ のときは

$$a_{n+1} = a_n + b$$

なので、

$$a_{n+1} - a_n = b$$

です。これは毎回 b ずつ増えるという意味です。実際、

$$a_2 - a_1 = b, \qquad a_3 - a_2 = b, \qquad \dots, \qquad a_n - a_{n-1} = b$$

を全部足し合わせると途中の項が打ち消し合って

$$a_n - a_1 = (n-1)b$$

となるので、

$$a_n = a_1 + (n-1)b$$

となります。したがって $r \neq 1$ の公式をそのまま使うのではなく、$r = 1$ は別に扱う必要があります。

6 別の見方

6.1 行列による見方

一次の差分方程式

$$a_{n+1} = ra_n + b$$

は、1 を付け足して

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けば、行列の反復として見られます。

この見方では、漸化式を何回も適用することは、行列を何回も掛けることに対応します。したがって高階の漸化式では、行列を対角化できるかどうかが解きやすさに直結します。

この見方の利点は、一次だけでなく二階や高階の漸化式まで、同じ枠組みで整理できることです。

6.2 解析的な見方

$$a_{n+1} - a_n = ka_n$$

は

$$\Delta a_n = ka_n$$

であり、これは微分方程式

$$y' = ky$$

の離散版と見られます。連続では指数関数が現れ、離散では等比数列が現れます。

6.3 複素関数による見方

差分方程式で r^n が自然に出るのは、複素指数関数まで含めるとさらに見通しがよくなります。たとえば $r = \rho e^{i\theta}$ と書けると

$$r^n = \rho^n e^{in\theta}$$

です。ここで

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

なので、振動しながら増減する数列は、複素数を使うと 1 つの指数型でまとめて扱えます。

この見方の利点は、「倍率」と「回転」を同時に表せることです。とくに二階差分方程式で複素数の解が出るとき、実数解が三角関数の形になる理由もここから見えます。

7 見分け方

- 隣り合う項 a_{n+1}, a_n の関係が与えられたら、差分方程式として見ます。
- 定数を足す形 $a_{n+1} = ra_n + b$ では、まず平衡点を引いて同次化できないかを考えます。
- 連続な微分方程式との対応を見ると、式の意味がつかみやすくなります。

8 どこまで成り立つか

ここでは一次の基本形だけを扱いました。また $a_{n+1} = ra_n + b$ の解法は $r \neq 1$ と $r = 1$ で場合分けが必要です。高階の差分方程式や非線形の差分方程式では、別の手法が必要です。

9 最終形

$$\boxed{\Delta a_n = a_{n+1} - a_n}$$

$$\boxed{a_{n+1} = ra_n + b \Rightarrow a_n = \frac{b}{1-r} + Cr^{n-1}\ (r \neq 1)}$$

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + b \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)b\ (r = 1)}$$

10 一言でいうと

- 差分方程式は、数列の変化を離散な変化率で書いた方程式です。