数列と漸化式

1 導入

数列で最重要なのは、1 項ずつ追うだけでなく、「どんな量を作ると規則が単純になるか」を見抜くことです。

ただし、数列の講義を 1 本にまとめすぎると、差を見る話、比を見る話、平衡点を作る話が混ざってしまいます。このノートでは、まず全体像を整理し、そのあと詳細は個別の講義へつなぎます。

2 用語と定義

数列（Sequence）とは、$a_1, a_2, a_3, \ldots$ のように順番に並んだ数です。

漸化式（Recurrence relation）とは、a_{n+1} を a_n などで表す式です。

3 方針

漸化式では、そのまま追うより、差を取る、比を取る、定数を引く、といった変形で既知の型に落とします。
このノートでは、「どの型を選ぶか」の見取図を与えることを主目的にします。

4 直感的な説明

4.1 1. 等差数列と等比数列

毎回「どれだけ増えるか」が一定なら差を見るべきで、毎回「何倍か」が一定なら比を見るべきです。

4.2 2. 一次漸化式の見方

$a_{n+1} = pa_n + q$ のような式は、そのままだと毎回 q が邪魔です。そこで「平衡点」になる定数を引くと、等比数列へ変わります。

4.3 3. 見取図

- 増え方が一定なら、差を見る
- 倍率が一定なら、比を見る
- 足し算と掛け算が混ざるなら、平衡点を探して定数を引く

5 厳密な説明

このノートでは厳密な導出をすべて展開するより、「どの型に落ちるか」を整理します。

等差数列は

$$a_{n+1} - a_n = d$$

という差の一定に着目する型です。

等比数列は

$$a_{n+1} = ra_n$$

という比の一定に着目する型です。

一次漸化式

$$a_{n+1} = pa_n + q$$

は、$\alpha = p\alpha + q$ を満たす平衡点 α を取ると

$$b_n := a_n - \alpha$$

によって

$$b_{n+1} = pb_n$$

という等比型へ変形できます。

ここで大事なのは、複雑な漸化式を新しい数列に置き換えて、知っている型へ戻すことです。

6 別の見方

6.1 代数的な見方

高校数学では、差を取る、比を取る、平衡点を引く、という操作で型を単純にします。これは「式を知っている形に変形する」という代数的な発想です。

6.2 線形代数・行列による見方

大学数学では、漸化式を行列の反復として読むことがあります。すると一次の漸化式で平衡点を引くことは、原点を不動点へ移して変換を単純化することだと見えます。

6.3 解析的・複素関数による見方

差分方程式と見れば、漸化式は微分方程式の離散版です。また r^n を複素数まで広げると、振動する数列も複素指数関数でまとめて見られます。

この見方の利点は、高校数学の手の動かし方と、大学数学での構造の見方が別物ではなく、同じ規則を別の言葉で見ているだけだと分かることです。

7 詳細への案内

等差数列と等比数列の導出と使い分けは、等差数列と等比数列-講義で詳しく扱います。

一次漸化式の平衡点を使う変形は、一次漸化式-講義で詳しく扱います。

8　どこまで成り立つか

この方法は、一次の漸化式には非常に有効です。非線形の漸化式では、別の量を作る工夫が必要です。

9　最終形

差が一定なら等差、比が一定なら等比

$a_{n+1} = pa_n + q$ では平衡点を引いて等比に直す

10　一言でいうと

- 差を見るか、比を見るか、平衡点を作るかを選ぶのが本質です。

11　関連リンク

関連講義・関連ノート

→ 講義 等差数列と等比数列 lecture math sequence
https://study.bem130.com/lecture/math/sequence/等差数列と等比数列-講義/

→ 講義 一次漸化式 lecture math sequence
https://study.bem130.com/lecture/math/sequence/一次漸化式-講義/

→ 講義 差分方程式の基本 lecture math sequence
https://study.bem130.com/lecture/math/sequence/差分方程式の基本-講義/

→ 講義 数列ポータル lecture math sequence
https://study.bem130.com/lecture/math/sequence/数列ポータル-講義/