数列の極限

1 導入

この講義で最重要なのは、**数列を「どこへ近づくか」で分類すること**です。
数列では、各項を全部個別に見るのではなく、n が大きくなったときの全体の振る舞いを見ます。これが極限です。

2 用語と定義

数列 (Sequence) とは、$a_1, a_2, a_3, \ldots$ のように並んだ数です。
収束 (Convergence) とは、a_n がある値 L に近づくことです。
発散 (Divergence) とは、ある有限の値に近づかないことです。

3 方針

数列の極限では、まず主役になる部分を見抜きます。等比数列なら公比、分数式なら最高次の項、上下から押さえられるなら評価です。

4 直感的な説明

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ は掛けるたびに小さくなるので 0 に近づきます。いっぽう 2^n はどんどん大きくなるので有限な値には近づきません。つまり極限では、「何を何回掛けているか」が非常に重要です。

5 厳密な説明

5.1 1. 等比数列

$$a_n = ar^{n-1}$$

なら、$|\, r \,| < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

です。

5.2 2. 分数式の極限

たとえば

$$a_n = \frac{3n^2+1}{n^2-2n+5}$$

では、分子・分母を n^2 で割ると

$$a_n = \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}$$

です。したがって

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 3$$

です。

5.3 3. はさみ打ち

たとえば

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

であり、両端がともに 0 に収束するので

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

です。

6 見分け方

- 公比が見えたら、まず $|\,r\,| < 1$ かどうかを見ます。
- 分数式なら、最高次の項で割ることを疑います。
- 振動していても大きさが押さえられているなら、はさみ打ちを疑います。

7 どこまで成り立つか

数列の極限は、関数の極限と似ていますが、動ける点が整数だけに限られます。したがって連続的な変化として見るより、「項が進んだときどうなるか」を直接追います。

8 最終形

$$\boxed{|\,r\,| < 1 \Rightarrow r^n \to 0}$$

$$\boxed{\text{分数式では最高次で割る}}$$

$$\boxed{\text{上下から押さえられればはさみ打ち}}$$

9 一言でいうと

- 数列の極限では、主役になる部分を見抜いて、残りを小さくするのが基本です。

10 関連(かんれん)リンク

→ 講義 等差数列と等比数列 lecture math sequence
https://study.bem130.com/lecture/math/sequence/等差数列と等比数列-講義/

→ 講義 極限と連続 lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/極限と連続-講義/