等差数列と等比数列

1　導入

この講義で最重要なのは、**数列の変化が「足し算」なのか「掛け算」なのかを見抜くこと**です。数列の公式だけを覚えると、問題を見たときにどれを使えばよいかが分からなくなります。毎回の変化が差で一定なのか、比で一定なのかを見ることが出発点です。

2　用語と定義

等差数列 (Arithmetic sequence) とは、隣り合う項の差が一定の数列です。
等比数列 (Geometric sequence) とは、隣り合う項の比が一定の数列です。

3　方針

数列を見たら、まず「足し算の規則か」「掛け算の規則か」を確認します。差が一定なら等差数列、比が一定なら等比数列です。

4　直感的な説明

4.1　1. 等差数列

等差数列は、毎回「同じだけ進む」数列です。たとえば $3, 5, 7, 9, \cdots$ は、毎回 2 ずつ増えています。

4.2　2. 等比数列

等比数列は、毎回「同じ倍率で変わる」数列です。たとえば $3, 6, 12, 24, \cdots$ は、毎回 2 倍になっています。

4.3　3. 見分け方

引き算して一定なら等差数列、割り算して一定なら等比数列です。この見分けが、あとで漸化式を見るときの基本になります。

5　厳密な説明

5.1　1. 等差数列の一般項

$$a_{n+1} - a_n = d$$

なら

$$a_2 = a_1 + d, \qquad a_3 = a_1 + 2d, \qquad a_4 = a_1 + 3d$$

と続くので、

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

です。

5.2 2. 等比数列の一般項

$$a_{n+1} = ra_n$$

なら

$$a_2 = a_1 r, \qquad a_3 = a_1 r^2, \qquad a_4 = a_1 r^3$$

と続くので、

$$\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$$

です。

5.3 3. 具体例

数列 2, 5, 8, 11, ⋯ では

$$5 - 2 = 3, \qquad 8 - 5 = 3$$

だから公差 3 の等差数列です。したがって

$$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$$

です。

数列 5, 10, 20, 40, ⋯ では

$$\frac{10}{5} = 2, \qquad \frac{20}{10} = 2$$

だから公比 2 の等比数列です。したがって

$$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

です。

6 別の見方

等差数列は一次関数の離散版、等比数列は指数関数の離散版と見ることができます。この見方を持つと、増え方の違いが整理しやすくなります。

7 どこまで成り立つか

差や比が一定でない数列には、そのままでは使えません。そのときは差を取り直すか、別の量を作る必要があります。

8 最終形

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = d \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d}$$

$$\boxed{a_{n+1} = ra_n \Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1}}$$

9 一言でいうと

- 差が一定なら等差数列、比が一定なら等比数列です。
- 問題では、まず引き算か割り算かを試します。

10 関連リンク

関連講義・関連ノート

→ 講義 **数列と漸化式** lecture math sequence
https://study.bem130.com/lecture/math/sequence/数列と漸化式-講義/

→ 講義 **一次漸化式** lecture math sequence
https://study.bem130.com/lecture/math/sequence/一次漸化式-講義/

元の解答

なし

スキャン画像

なし