# 三角関数

## 1 導入

この講義の核心は、**三角関数とは単位円の上の点の座標として定義され、角度を加えることが複素数の積（回転の合成）に対応する**という見方だ。

「直角三角形の辺の比」として始めると 0° から 90° までしか扱えず、なぜ周期が出るのか、なぜ加法定理が成り立つのかが見えない。単位円で定義すると任意の角度が扱え、符号・周期・加法定理がすべて幾何から自然に出てくる。

## 2 用語と定義

### 2.1 正弦(Sine)・余弦(Cosine)・正接(Tangent)

単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の角 $\theta$ の点を $(\cos\theta, \sin\theta)$ と定義する。

$$\cos\theta = x[\text{座標/ざひょう}], \quad \sin\theta = y[\text{座標/ざひょう}], \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (\cos\theta \neq 0)$$

この定義から直接：

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{（[単位円/たんいえん]の[方程式/ほうていしき]そのもの）}$$

## 3 方針

1. 単位円で符号・周期・基本値を確認する
2. 加法定理を回転行列の合成として導出する
3. オイラーの公式で三角関数・指数関数・複素数を統一する

## 4 厳密な説明

### 4.1 1. 基本値一覧

| $\boldsymbol{\theta}$ | **0** | $\frac{\pi}{6}$ **(30°)** | $\frac{\pi}{4}$ **(45°)** | $\frac{\pi}{3}$ **(60°)** | $\frac{\pi}{2}$ **(90°)** |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\theta$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan\theta$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | 不定 |

**記憶法**：$\sin\theta$ の分子は $\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$ を 2 で割った値。

## 4.2 2. 対称性と周期性

- **偶奇性**：$\cos(-\theta) = \cos\theta$（偶関数）、$\sin(-\theta) = -\sin\theta$（奇関数）
- **周期**：$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$、$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$、$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$
- **象限による符号**：第一象限（両 正）→ 第二（sin 正）→ 第三（両 負）→ 第四（cos 正）

## 4.3 3. 加法定理の導出（回転行列）

角度 $\phi$ の回転行列は、$(1,0) \mapsto (\cos\phi, \sin\phi)$、$(0,1) \mapsto (-\sin\phi, \cos\phi)$ から：

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

角度 $\theta$ の点をさらに $\phi$ 回転させると：

$$R_\phi \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) \end{pmatrix}$$

よって：

$$\boxed{\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi}$$

$$\boxed{\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi}$$

この導出は「加法定理は回転の合成を言葉にしたもの」という理解を与える。

## 4.4 4. オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

証明（テイラー展開）：$e^{i\theta}$ を展開し実部・虚部を $\cos\theta$、$\sin\theta$ の展開と比較して一致することを確認する。
**応用**：$e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}$ を展開すると加法定理が一行で得られる。また $e^{i\pi} + 1 = 0$（オイラーの等式）。

## 4.5 5. 三角関数の微分

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

**導出**：$\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h} = 1$ と加法定理から。$\sin'(x) = \cos x$ は「sin が cos と 90° 位相がずれている」という波の見方と一致する。

## 4.6 6. 逆三角関数

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

逆三角関数の微分は $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$ など積分の公式と表裏一体である。

## 5　見分け方

- 辺の長さの比 → 直角三角形の見方（0°　から 90°　）
- 90° 以上の角度・符号・周期 → 単位円の見方
- 加法定理を証明したい → 回転行列または $e^{i\theta}$
- $\sin x \approx x$（$x$ が小さい）　→ テイラー展開の 1 次近似
- 積分で $\sqrt{1-x^2}$ が出た → $x = \sin\theta$ の置換

## 6　どこまで成り立つか

sin・cos は全平面で微分可能で周期を持つ唯一の初等関数クラスである（指数型関数 $e^{i\theta}$ の実・虚部）。複素数の範囲では $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$ と定義が拡張され、双曲線関数 $\sinh z = (e^z - e^{-z})/2$ と深い関係を持つ。

## 7　最終形

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

$$\boxed{\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi}$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x}$$

## 8　一言でいうと

三角関数とは単位円の座標であり、加法定理は回転の合成、オイラーの公式は三角関数と指数関数が $e^{i\theta}$ という一つの対象の実部・虚部に過ぎないことを示す—三角形から始まった概念が複素解析の中心に至る。

## 9　関連リンク

→ 講義 三角関数の加法定理 lecture math trigonometry
https://study.bem130.com/lecture/math/trigonometry/三角関数の加法定理-講義/

→ 講義 ベクトルと内積 lecture math vector
https://study.bem130.com/lecture/math/vector/ベクトルと内積-講義/

→ 講義 複素数と複素平面 lecture math algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/複素数と複素平面-講義/