三角関数の加法定理

1　導入

この講義で最重要なのは、**加法定理を暗記するのでなく、「角度を足す」と座標がどう変わるかを記述した式だと見ること**です。

三角関数でつまずきやすいのは、$\sin(\alpha+\beta)$ や $\cos(\alpha+\beta)$ の式が突然現れて、なぜその形になるのかが分からないことです。この講義では、回転の合成からその意味を押さえます。

2　用語と定義

加法定理（Addition formulas）とは、

$$\sin(\alpha+\beta),\ \cos(\alpha+\beta)$$

を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ で表す公式です。

3　方針

まず単位円で 1 回の回転を座標として見ます。そのあと、角度 α の回転と β の回転を続けると、全体では $\alpha+\beta$ の回転になることを使います。

→ 講義 三角関数 lecture math trigonometry
https://study.bem130.com/lecture/math/trigonometry/三角関数-講義/

→ 講義 複素数と複素平面 lecture math algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/複素数と複素平面-講義/

4　直感的な説明

回転を 2 回続けると、結局は角度を足した 1 回の回転です。だから $\alpha+\beta$ の三角関数は、α と β それぞれの情報から作れるはずです。これを式にしたものが加法定理です。

5　厳密な説明

5.1　1. 回転の見方

単位円で角度 θ に対応する点は

$$(\cos\theta, \sin\theta)$$

です。

5.2 2. 加法定理

回転の合成を座標で追うと、

$$R_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

であり、角度 α の点

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

をさらに β だけ回転させると

$$R_\beta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha \end{pmatrix}$$

になります。左辺は角度 $\alpha + \beta$ の点でもあるから、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

を得ます。

5.3 3. ここから何が出るか

$\beta = \alpha$ と置けば倍角公式が出ます。さらに $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ を組み合わせると積和・和積の公式へつながります。

つまり加法定理は、その後の三角関数の公式の出発点です。

6 別の見方

6.1 幾何的な見方

加法定理は、回転を 2 回続けると角度の和の回転になる、という幾何の事実を座標で書いたものです。

6.2 行列による見方

回転行列の積を計算すると加法定理が出ます。この見方では、三角関数は回転という線形変換の成分だと分かります。

6.3 複素関数による見方

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

と

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を使って実部と虚部を比べても加法定理が出ます。この見方の利点は、角度の和が指数法則として一気に書けることです。

7 見分け方

- $15°, 75°$ のように角度を足したり引いたりして作れそうなら、加法定理を疑います。
- 倍角、半角、合成の公式が必要なら、まず加法定理へ戻ります。

8 最終形

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

9 一言でいうと

- 加法定理は、「角度の和をどう分解するか」を表す三角関数の中心公式です。