面積分と流束

1 導入

このページの核心は、面積分を曲面を貫く量の総和として整理することである。

2 用語と定義

流束 (Flux) は、ベクトル場が曲面をどれだけ通過するかを表す量である。

面積分 (Surface integral) は、曲面上のスカラー量またはベクトル場の法線成分を積分する操作である。

3 方針

曲面を $\boldsymbol{r}(u,v)$ で表示し、接ベクトル $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ から法線方向を構成する。流束では、ベクトル場のうち法線方向の成分だけを数える。

4 向き付き曲面

流束では、曲面の表裏を区別する必要がある。法線方向を反転すると、流束の符号も反転する。閉曲面では、通常は外向き法線を選択する。

5 厳密な説明

曲面 S が $\boldsymbol{r}(u,v)$ で表示されるとき、

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v))\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\,du\,dv$$

である。向きを反転すると流束の符号も反転する。

$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ は、接平面に垂直な方向と微小面積を同時に表す。$|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,du\,dv$ は面積要素であり、向き付き流束では絶対値を取らずに $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\,du\,dv$ を使用する。

6 具体計算

上向きの平面 $z=0$、$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ を考える。$\boldsymbol{F}=(0,0,z+1)$ なら、法線は $(0,0,1)$ であり、流束は

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 1\,dx\,dy = 1$$

である。下向きの法線を選択すると値は -1 になる。

7 球面の例

$\boldsymbol{F}=(x,y,z)$ とし、半径 R の球面を外向きに向き付ける。球面では $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=R$ であるため、流束は $4\pi R^3$ になる。Gauss 定理では divergence が 3 で、体積が $4\pi R^3/3$ なので同じ値を得る。

8 円柱の例

半径 R、高さ H の円柱側面を

$$\boldsymbol{r}(\theta,z)=(R\cos\theta,R\sin\theta,z)$$

で表示する。$0\le\theta\le 2\pi$、$0\le z\le H$ である。外向きの向き付き面要素は

$$\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_z=(R\cos\theta,R\sin\theta,0)$$

である。$\boldsymbol{F}=(x,y,0)$ なら、流束は

$$\int_0^H\int_0^{2\pi}R^2\,d\theta\,dz=2\pi R^2H$$

である。

9 比較例: 面に平行な場

$z=0$ の上向き平面片に対し、$\boldsymbol{F}=(1,0,0)$ は面に平行である。したがって $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=0$ であり、流束は 0 になる。矢印が曲面上に存在しても、法線成分がなければ貫通量は発生しない。

10 Gauss 定理への橋渡し

閉曲面を通過する総流束は、内部の発散の総和と一致する。この事実が Gauss の発散定理である。面積分は境界上の量、divergence は内部の局所量であり、次のページで両者を接続する。

11 よくある誤り

- 法線方向を指定せずに流束を計算する。
- 面積要素 $|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|$ と向き付き面要素 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ を混同する。
- 曲面の境界を確認せず、Stokes 定理の向きを誤る。

12 関連リンク

→ 講義 Green・Gauss・Stokes の定理 lecture math vector-calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/vector-calculus/Green・Gauss・Stokes の定理-講義/