

アフィン結合と重心

1 導入

この講義で重要なのは、中点、内分点、重心を、係数の和が1になる点の重みつき平均として統一することである。

点どうしを無条件に加法することはできない。しかし係数の和が1になる組合せなら、原点の選択に依存しない点を定義できる。この操作がアフィン結合である。

2 用語と定義

アフィン結合とは、点 P_1, \dots, P_k と係数 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ に対して、

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$$

を満たすときの

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k$$

という点の組合せである。

重心とは、頂点の位置を同じ重みで平均した点である。

3 方針

まず2点の中点を確認する。つぎに係数の和が1であることが、原点を変更しても点に変化しない理由であることを確認する。

→ 講義 点とベクトルの違い [lecture](https://study.bem130.com/lecture/math/vector/) [math](#) [vector](#)
[https://study.bem130.com/lecture/math/vector/点とベクトルの違い-講義/](https://study.bem130.com/lecture/math/vector/)

4 直感的な説明

中点は2点の平均である。重心は3点の平均である。内分点は、2点に異なる重みを付けた平均である。したがって、図形の線分比や重心は、点の重みつき平均として整理できる。ただし係数の和は1でなければならない。

5 厳密な説明

原点を O とし、点 P_i の位置ベクトルを $p_i = \overrightarrow{OP_i}$ とする。係数が $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ を満たすなら、

$$p = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_k p_k$$

は1つの点の位置ベクトルを与える。

原点を別の点 O' に変更しても、各 p_i には同じ補正ベクトルが加わる。その補正の係数は

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$$

になるため、結果は同じ点を表す。これが係数の和を1にする理由である。

6 具体例

2点 A, B の中点 M は

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

である。係数は $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ である。

三角形 ABC の重心 G は

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

である。係数は $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ である。

7 線形結合との違い

線形結合では係数の和に制限がない。材料ベクトルから到達可能なベクトルを作る操作である。

アフィン結合では係数の和を1に制限する。点を点として保ち、原点の選択に依存しない図形的な点を得るためである。

8 よくある誤解

- 重心は単なる公式ではなく、等重みのアフィン結合である。
- 点の係数つき和では、係数の和が1であることが本質である。
- 線形結合とアフィン結合を混同しない。対象がベクトルか点かで役割が異なる。

9 最終形

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$$

$$P = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k$$

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

10 一言でいうと

- アフィン結合は、係数の和を1にして点を点として平均化する操作である。

11 かんれん 関連リンク

→ 講義 **位置ベクトルと図形への応用** lecture math vector
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/位置ベクトルと図形への応用-講義/>

→ 講義 **線型結合と張る空間の基本** lecture math linear-algebra
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型結合と張る空間の基本-講義/>