

スカラー三重積と体積

1 導入

この講義で重要なのは、スカラー三重積を、3本のベクトルが作る平行六面体の符号付体積として理解することである。

外積は2本のベクトルが張る面積と法線方向を表す。そこに3本目のベクトルとの内積を取ると、底面積に高さを掛けた体積が得られる。

2 用語と定義

スカラー三重積とは、3次元ベクトル a, b, c に対して

$$a \cdot (b \times c)$$

で定義される数である。

3 方針

まず $b \times c$ を底面の面積と法線方向として確認する。つぎに $a \cdot (b \times c)$ が、その法線方向への a の成分を抽出することを確認する。

→ 講義 外積の基本 [lecture](#) [math](#) [vector](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/外積の基本-講義/>

4 直感的な説明

$b \times c$ の大きさは、 b, c が作る平行四辺形の面積である。その方向は底面に垂直である。ここで a との内積を取ると、 a のうち底面に垂直な成分だけが残る。これは高さに対応する。したがって、 $a \cdot (b \times c)$ は「底面積 × 符号付の高さ」であり、符号付体積になる。

5 厳密な説明

a, b, c を列に並べた行列を

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a & b & c \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

とする。このとき

$$\det A = a \cdot (b \times c)$$

である。したがってスカラー三重積は、行列式と同じく符号付体積を表す。

絶対値

$$|a \cdot (b \times c)|$$

が平行六面体の体積である。符号は、 a, b, c の向きが右手系に一致するかどうかを表す。

6 具体例

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

では、

$$b \times c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。したがって

$$a \cdot (b \times c) = 1$$

となる。これは標準基底が作る単位立方体の体積が 1 であることに対応する。

7 よくある誤解

- スカラー三重積はベクトルではなく数である。
- 絶対値は体積を与えるが、符号は向きの情報を持つ。
- $a \cdot (b \times c)$ の順序を無条件に入替えてはならない。巡回置換では値が保たれ、2 本を交換すると符号が反転する。

8 どこまで成り立つか

この形のスカラー三重積は、3次元ユークリッド空間の外積を前提にする。高次元では、体積は行列式や外積代数により一般化される。

9 最終形

$$a \cdot (b \times c) = \det(a, b, c)$$

$$|a \cdot (b \times c)| = \text{平行六面体の体積}$$

10 一言でいうと

- スカラー三重積は、外積で底面積を作り、内積で高さを抽出する符号付体積である。

11 かんれん 関連リンク

→ 講義 外積の基本 lecture math vector
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/外積の基本-講義/>

→ 講義 行列式 lecture math linear-algebra
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列式-講義/>

→ 講義 ベクトル解析の入口 lecture math analysis
<https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/ベクトル解析の入口-講義/>