

図形ベクトルと内積

1 導入

この講義で重要なのは、内積を、2本のベクトルの向きの一貫度を数値化し、角度や垂直を成分計算へ翻訳する道具として理解することである。

図形では角度や垂直が自然に出現する。しかし計算では、角度をそのまま扱うより、成分の積の和へ変換したほうが判定しやすい。内積はこの変換を担当する。

→ [講義](#) ベクトルとは何か [lecture](#) [math](#) [vector](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/ベクトルとは何か-講義/>

2 用語と定義

内積とは、2つのベクトル a, b と、そのなす角 θ に対して

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$$

で定義される量である。

平面の成分表示で $a = (a_1, a_2)$ 、 $b = (b_1, b_2)$ なら、

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

である。

3 方針

図形的には、内積を「射影した長さを掛ける量」として確認する。計算では、成分どうしの積の和として処理する。最後に、垂直条件、長さ、角度の式へ接続する。

4 直感的な説明

内積は、2本のベクトルがどれだけ同じ方向を向くかを測定する。同じ向きなら正で大きく、垂直なら0、反対向きなら負になる。

射影で解釈すると、 $a \cdot b$ は「 a の長さ」と「 b の a 方向への影の長さ」の積である。影の長さが $|b| \cos \theta$ であるため、 $|a| |b| \cos \theta$ が現れる。

5 厳密な説明

$a = (a_1, a_2)$ 、 $b = (b_1, b_2)$ とする。成分による内積は

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

である。長さは

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$

で得られる。なぜなら、

$$a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 = |a|^2$$

ためである。

垂直なら $\theta = 90^\circ$ であり、 $\cos \theta = 0$ となる。したがって

$$a \perp b \iff a \cdot b = 0$$

である。角度を求める場合は、 $a, b \neq 0$ のとき

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

を用いる。

6 具体例

$$a = (1, 2), \quad b = (2, -1)$$

なら

$$a \cdot b = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$$

である。したがって a と b は垂直である。図示しなくても、成分計算だけで直角を判定できる。

7 別の観点

幾何的には、内積は射影と角度を測定する量である。代数的には、対応する成分どうしを掛けて加算する演算である。この2つの観点を接続すると、図形条件を方程式へ変換できる。

8 見分け方

- 角度、垂直、長さが問われる場合、内積を検討する。
- 平行そのものを判定する場合は、定数倍の関係のほうが直接的である。
- 複素の内積では共役が関与するため、この図形的な角度公式をそのまま一般化しない。

9 どこまで成り立つか

この講義は実平面や実空間の図形ベクトルを前提にする。大学数学では、内積は一般の内積空間へ拡張される。ただし複素内積では角度の扱いに注意が必要である。

→ [講義 内積空間の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/>

10 最終形

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$$

$$a \perp b \iff a \cdot b = 0$$

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$

11 一言でいうと

- 内積は、角度・垂直・長さを成分計算へ翻訳する道具である。

12 関連リンク

→ [講義](#) [ベクトルポータル](#) [lecture](#) [math](#) [vector](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/ベクトルポータル-講義/>

→ [講義](#) [三角関数](#) [lecture](#) [math](#) [trigonometry](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/trigonometry/三角関数-講義/>

→ [講義](#) [内積空間の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/>