

# 位置ベクトルと図形への応用

## 1 導入

この講義で重要なのは、点を原点からの位置ベクトルで表示し、図形条件を加法と係数の式へ変換することである。

図形の問題では、中点、内分点、重心のように点どうしの関係が出現する。位置ベクトルを用いると、これらを平均や重みつき平均として計算できる。

→ [講義](#) [点とベクトルの違い](#) [lecture](#) [math](#) [vector](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/点とベクトルの違い-講義/>

## 2 用語と定義

位置ベクトルとは、原点  $O$  から点  $P$  へ向かうベクトル  $\overrightarrow{OP}$  である。

内分点とは、線分  $AB$  の内部で  $AP : PB = m : n$  を満たす点である。

重心とは、三角形の3頂点の位置ベクトルの平均で表される点である。

## 3 方針

点を直接操作せず、まず原点  $O$  からの位置ベクトルに変換する。その後で、中点、内分点、重心を係数つき平均として計算する。

## 4 直感的な説明

位置ベクトルは、点の場所を原点からの矢印として記録する方法である。点をベクトルで表示できるため、図形の関係成分や係数で処理できる。

中点は2点の平均である。重心は3点の平均である。内分点は、線分比に応じた重みつき平均である。

## 5 厳密な説明

### 5.1 1. 中点

$M$  が  $A, B$  の中点なら、

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

である。これは2つの位置ベクトルの平均である。

## 5.2 2. 内分点

$P$  が  $AB$  を  $m:n$  に内分するなら、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

である。 $A$  に近いほど  $A$  側の係数は小さくなり、反対側の点の係数が大きくなる。

## 5.3 3. 重心

三角形  $ABC$  の重心  $G$  は、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

である。これは 3 頂点の等重みのアフィン結合である。

→ [講義](https://study.bem130.com/lecture/math/vector/アフィン結合と重心-講義/) アフィン結合と重心 [lecture](#) [math](#) [vector](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/アフィン結合と重心-講義/>

## 6 具体例

$A = (1, 2)$ 、 $B = (5, 4)$  とする。中点  $M$  は

$$M = \frac{A+B}{2} = \left( \frac{1+5}{2}, \frac{2+4}{2} \right) = (3, 3)$$

である。これは座標ごとの平均である。

## 7 別の観点

図形的には、位置ベクトルは点の配置を矢印で表現する方法である。代数的には、点の関係を係数つき平均で処理する方法である。

## 8 見分け方

- 中点、内分点、重心が出現したら、位置ベクトルを検討する。
- 線分比が多い図形問題では、座標計算より位置ベクトルのほうが短縮できる場合がある。
- 点とベクトルの区別が必要な場面では、まず点どうしの差をベクトルとして確認する。

## 9 どこまで成り立つか

位置ベクトルは原点の選択に依存する。一方、内分比や重心のような図形的関係は、原点を変更しても変化しない。この不変性を明確にする言葉がアフィン結合である。

## 10 最終形

さいしゅうけい

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

## 11 一言でいうと

ひとこと

- 位置ベクトルは、点の関係を加法と係数の計算へ変換する道具である。

## 12 関連リンク

かんれん

→ [講義](#) [点とベクトルの違い](#) [lecture](#) [math](#) [vector](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/点とベクトルの違い-講義/>

→ [講義](#) [アフィン結合と重心](#) [lecture](#) [math](#) [vector](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/アフィン結合と重心-講義/>

→ [講義](#) [図形と方程式の基本](#) [lecture](#) [math](#) [geometry](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/geometry/図形と方程式の基本-講義/>