

# 点とベクトルの違い

## 1 導入

この講義で重要なのは、点<sup>てん</sup>は場所<sup>ばしょ</sup>であり、ベクトル<sup>いどうりょう</sup>は移動量<sup>さ</sup>や差<sup>さ</sup>である、という区別<sup>くべつ</sup>を最初<sup>さいしよ</sup>に固定<sup>こてい</sup>することである。

座標<sup>ざひょう</sup>を使うと、点<sup>てん</sup>もベクトル<sup>ひょうじ</sup>も  $(2, 3)$  のように表示<sup>ひょうじ</sup>される。そのため両者<sup>りょうしや</sup>を同一視<sup>どういつし</sup>しやすい。しかし意味<sup>いみ</sup>は異なる。点<sup>てん</sup>は空間<sup>くうかん</sup>内の位置<sup>いち</sup>であり、ベクトル<sup>てん</sup>は点<sup>てん</sup>から点<sup>へんい</sup>への変位<sup>へんい</sup>である。

## 2 用語と定義

点<sup>てん</sup>とは、空間<sup>くうかん</sup>の場所<sup>ばしょ</sup>を表す対象<sup>あらわ</sup>である。  
Point

ベクトル<sup>いどうりょう</sup>とは、移動量<sup>さ</sup>や差<sup>さ</sup>を表す対象<sup>あらわ</sup>である。  
Vector

位置ベクトル<sup>いち</sup>とは、原点<sup>げんてん</sup>  $O$  から点<sup>てん</sup>  $P$  へ向かうベクトル<sup>む</sup>  $\overrightarrow{OP}$  である。  
Position vector

## 3 方針

まず「点<sup>てん</sup>どうしは加法<sup>かほう</sup>しない」「点<sup>てん</sup>とベクトル<sup>かほう</sup>は加法<sup>てん</sup>できる」「点<sup>てん</sup>どうしの差<sup>さ</sup>はベクトル<sup>さ</sup>である」という3規則<sup>きそく</sup>を確認<sup>かくにん</sup>する。その後<sup>あと</sup>で位置ベクトル<sup>いち</sup>が原点<sup>げんてん</sup>の選択<sup>せんたく</sup>に依存<sup>いぞん</sup>することを確認<sup>かくにん</sup>する。

## 4 直感的な説明

点<sup>てん</sup>  $P$  は場所<sup>ばしょ</sup>である。ベクトル<sup>いどうりょう</sup>  $v$  は移動量<sup>さ</sup>である。したがって、点<sup>てん</sup> にベクトル<sup>くわ</sup> を加える  $P+v$  は「点<sup>てん</sup>  $P$  から  $v$  だけ移動<sup>いどう</sup>した点<sup>てん</sup>」として解釈<sup>かいしゃく</sup>できる。

一方<sup>いっぽう</sup>、点<sup>てん</sup> どうしを  $P+Q$  と加える操作<sup>くわ</sup> には、基準<sup>そうき</sup>なしでは自然<sup>きじゆん</sup>な意味<sup>しぜん</sup>がない。これに対して  $Q-P$  は、「 $P$  から  $Q$  への移動量<sup>いどうりょう</sup>」としてベクトル<sup>あた</sup> を与える。

## 5 厳密な説明

点<sup>てん</sup> の集合<sup>しゅうごう</sup> を  $E$ 、移動量<sup>いどうりょう</sup> のベクトル空間<sup>くうかん</sup> を  $V$  とする。点<sup>てん</sup>  $P \in E$  とベクトル<sup>たい</sup>  $v \in V$  に対して、 $P+v$  は点<sup>てん</sup> である。また2点<sup>たい</sup>  $P, Q \in E$  に対して、 $Q-P$  はベクトル<sup>たい</sup> である。

この構造<sup>こうぞう</sup> をアフィン空間<sup>くうかん</sup> という。線形空間<sup>せんけい</sup> では原点<sup>げんてん</sup> が特別<sup>とくべつ</sup> に指定<sup>して</sup> されるが、アフィン空間<sup>くうかん</sup> では原点<sup>げんてん</sup> を選択<sup>せんたく</sup> する前<sup>まえ</sup> の点<sup>てん</sup> の関係<sup>かんけい</sup> を扱う。  
Affine space

## 6 具体例

座標平面<sup>ざひょうへいめん</sup> で  $P = (1, 2)$ 、 $Q = (4, 6)$  とする。このとき

$$Q - P = (3, 4)$$

は  $P$  から  $Q$  へのベクトルである。これは点ではなく移動量である。

原点  $O = (0, 0)$  を選択すれば、 $P$  の位置ベクトルは

$$\overline{OP} = (1, 2)$$

である。同一の座標  $(1, 2)$  であっても、文脈により点を表す場合と、原点からのベクトルを表す場合がある。

## 7 よくある誤解

- 点とベクトルを同一視しない。座標が同形であっても意味が異なる。
- 点どうしの加法は基準なしには定義しない。
- 位置ベクトルは原点の選択に依存する。点どうしの差は原点を変更しても変化しない。

## 8 どこまで成り立つか

座標を選択すると、点もベクトルも数の組で表示できる。しかし、座標表示が似ていることと、対象が同一であることは別である。図形問題では、この区別が中点、重心、平行移動の理解を安定させる。

## 9 最終形

点 + ベクトル = 点

点 - 点 = ベクトル

点 + 点 は基準なしには定義しない

## 10 一言でいうと

- 点は場所、ベクトルは移動量であり、位置ベクトルは原点を選択して点をベクトルで表示したものである。

## 11 関連リンク

→ 講義 位置ベクトルと図形への応用 [lecture](https://study.bem130.com/lecture/math/vector/) [math](#) [vector](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/位置ベクトルと図形への応用-講義/>

→ 講義 アフィン結合と重心 [lecture](https://study.bem130.com/lecture/math/vector/) [math](#) [vector](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/アフィン結合と重心-講義/>