行ベクトルと列ベクトル

1 導入

この講義で重要なのは、**行ベクトルと列ベクトルは同じ成分を持っていても、行列積の中では異なる役割を持つ**ということである。

初学段階では、横に記述するか縦に記述するかだけの違いに感じられる。しかし行列との積では、サイズ条件と写像の向きが変化するため、区別が必須である。

2 用語と定義

列ベクトル (Column vector) とは、成分を縦に並べた $n \times 1$ 行列である。

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

行ベクトル (Row vector) とは、成分を横に並べた $1 \times n$ 行列である。

$$y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

3 方針

まず形とサイズを確認する。つぎに転置により行ベクトルと列ベクトルが相互に変換されることを確認する。最後に、行列積で左から掛けるか、右から掛けるかの違いを整理する。

→ 講義 行列の積の意味 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列の積の意味-講義/

4 直感的な説明

列ベクトルは、線形写像に入力する座標として使用されることが多い。行列 A が $m \times n$ なら、$n \times 1$ の列ベクトル x に対して Ax が定義される。

行ベクトルは、線形形式や内積の表示で出現することが多い。たとえば $y^T x$ は、行ベクトルと列ベクトルの積として数を与える。

5 厳密な説明

x を $n \times 1$ の列ベクトル、A を $m \times n$ 行列とする。このとき

$$Ax$$

は $m \times 1$ の列ベクトルである。内側のサイズ n が一致するためである。

一方、x^T は $1 \times n$ の行ベクトルである。$x^T A$ を定義するには、A が $n \times m$ でなければならない。したがって、同一の成分であっても形が変化すると、掛けられる相手も変化する。

6 具体例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

なら

$$Ax = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

である。一方、$x^T A$ は

$$x^T A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \end{pmatrix}$$

となり、結果は行ベクトルである。Ax と $x^T A$ は同一の操作ではない。

7 よくある誤解

- 行ベクトルと列ベクトルは、見た目だけの違いではない。サイズ条件が異なる。
- 転置は単なる整形ではなく、$n \times 1$ と $1 \times n$ を交換する操作である。
- 行列積は可換ではないため、左右の位置を入替えてはならない。

8 どこまで成り立つか

実数の行列では転置 T を用いる。複素の内積やユニタリ行列では、転置だけでなく共役転置 $*$ が必要になる。

9 最終形

$$\boxed{\text{列ベクトルは } n \times 1 \text{ 、行ベクトルは } 1 \times n}$$

$$\boxed{A_{m \times n} x_{n \times 1} \text{ は } m \times 1 \text{ の列ベクトル}}$$

10 一言でいうと

- 行ベクトルと列ベクトルは、成分ではなく形と作用の向きによって区別される。

11 関連リンク

→ 講義 行列の積の意味 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列の積の意味-講義/

→ 講義 **線型写像と行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/