零ベクトル・逆ベクトル・標準基底

1 導入

この講義で重要なのは、零ベクトル、逆ベクトル、標準基底を、計算の記号ではなく、ベクトル空間の基準として理解することである。

零ベクトルは加法の基準点であり、逆ベクトルは打消しの対象である。標準基底は、成分表示を支える基準方向である。

2 用語と定義

零ベクトル (Zero vector) とは、どのベクトル v に加えても v を変化させないベクトルである。

$$v + 0 = v$$

逆ベクトル (Additive inverse) とは、ベクトル v に加えると零ベクトルになるベクトル $-v$ である。

$$v + (-v) = 0$$

標準基底 (Standard basis) とは、$\mathbb{R}^n$ で 1 つの成分だけが 1、他が 0 のベクトルからなる基底である。

3 方針

まず零ベクトルと逆ベクトルを加法の構造として確認する。つぎに標準基底により、任意の成分ベクトルを基準方向の線形結合として表示する。

→ 講義 **ベクトルとは何か** lecture math vector
https://study.bem130.com/lecture/math/vector/ベクトルとは何か-講義/

4 直感的な説明

零ベクトルは「移動しない移動量」である。逆ベクトルは「元の移動を打ち消す移動量」である。
標準基底は、座標軸に沿った最小単位の方向である。平面では

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が標準基底である。

5 厳密な説明

$\mathbb{R}^n$ の零ベクトルは

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。$v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ の逆ベクトルは

$$-v = (-v_1, \ldots, -v_n)^T$$

である。したがって

$$v + (-v) = 0$$

が成立する。

標準基底を $e_1, \ldots, e_n$ とすると、任意の $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ は

$$v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$$

と表示できる。つまり、成分 v_i は標準基底 e_i をどれだけ混合するかを示す係数である。

6 よくある誤解

- 零ベクトルは数の 0 とは同一ではない。各成分が 0 のベクトルである。
- 逆ベクトルは逆数ではない。加法を打消す対象である。
- 標準基底は唯一の基底ではない。標準という名称は、座標表示で通常採用される基準を意味する。

7 どこまで成り立つか

零ベクトルと逆ベクトルは、一般のベクトル空間にも存在する。標準基底は $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ のように成分表示が先に与えられた空間で自然に定義される。

8 最終形

$$\boxed{v + 0 = v}$$

$$\boxed{v + (-v) = 0}$$

$$\boxed{v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n}$$

9 一言でいうと

- 零ベクトルは加法の基準、逆ベクトルは打消し、標準基底は座標表示の基準方向である。

10 関連リンク

→ 講義 行ベクトルと列ベクトル lecture math vector
https://study.bem130.com/lecture/math/vector/行ベクトルと列ベクトル-講義/

→ 講義 ベクトルの基本演算 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトルの基本演算-講義/

→ 講義 **ベクトル空間と基底** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトル空間と基底-講義/