ラグランジアンの基本

1 導入

この講義で最重要なのは、ラグランジアンは $L = T - U$ という量そのものよりも、「そこから運動方程式を作れる」ことが重要だということです。
ニュートン力学では力を成分ごとに追いますが、解析力学では一般化座標 q とその時間微分 $\dot{q}$ を使って、系をより構造的に書きます。

2 用語と定義

ラグランジアン Lagrangian とは、

$$L = T - U$$

で定義される量です。
ラグランジュ方程式 Lagrange equation とは、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

という形の運動方程式です。

3 方針

まず一般化座標 q を選び、T と U を $q, \dot{q}$ の式として書きます。そのあと、なぜ $L = T - U$ という組合わせが自然なのかを見てから、ラグランジュ方程式へ代入して運動方程式を出します。

→ 講義 解析力学の入口 lecture physics analytical-mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/analytical-mechanics/解析力学の入口-講義/

→ 講義 仕事と力学的エネルギー lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/仕事と力学的エネルギー-講義/

4 直感的な説明

ラグランジアンは、「その系がどう動きたがるか」を座標と速度でまとめたものです。力を1つずつ分解しなくても、運動エネルギーと位置エネルギーを書ければ式を立てられるところが強みです。
特に $T - U$ という差が重要なのは、速度に関する部分から慣性の効果が、座標に関する部分から力の効果が分かれて出てくるからです。

5 厳密な説明

5.1 1. 1 自由度ではなぜこの形になるか

一般化座標や「なぜ力よりエネルギーから出発するのか」という入口がまだ曖昧なら、ここで先にこちらへ戻ると読みやすくなります。

→ 講義 解析力学の入口 lecture physics analytical-mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/analytical-mechanics/解析力学の入口-講義/

一番基本の場合として、1 自由度の保存力の問題を考えます。ニュートン力学では

$$m\ddot{q} = F$$

です。ここで力が位置エネルギー $U(q)$ から

$$F = -\frac{dU}{dq}$$

と書けるなら

$$m\ddot{q} + \frac{dU}{dq} = 0$$

です。

いま

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2, \qquad L = T - U$$

とすると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

だから

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q}$$

です。また

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{dU}{dq}$$

なので、ニュートン方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

と書き直せます。

つまりラグランジュ方程式は、1 自由度の保存力の問題では、ニュートン方程式を $T - U$ の言葉へ言い換えたものとして現れます。

5.2 2. 一般論

一般化座標を q とすると、$L(q, \dot{q}, t)$ から

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

が得られます。

ここで $L = T - U$ を使うと、$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ は運動エネルギーの速度依存を拾い、$\dfrac{\partial L}{\partial q}$ は位置エネルギーの座標依存を拾います。だから「慣性項と力の項を結ぶ式」が自然に現れます。

ここでは 1 自由度で導出しましたが、解析力学の強みは、これを多自由度や拘束条件つきの系へ自然に広げられることです。

ただし、ここでの議論は保存力で記述でき、T と U が一般化座標と一般化速度の関数として書ける場合を前提にしています。したがって、摩擦のような非保存力が主役の問題では、$L = T - U$ だけで全てが済むわけではありません。

5.3 3. 質点ばね系

質量 m の物体がばね定数 k のばねにつながれているとします。座標を x とすると、

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \qquad U = \frac{1}{2}kx^2$$

なので

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

です。

ここで

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

だから、

$$m\ddot{x} - (-kx) = 0$$

すなわち

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

を得ます。

5.4 4. 見方

この式は、ニュートン力学で導く

$$m\ddot{x} = F = -kx$$

と同じです。ただし途中では、力を直接書かずに、エネルギーから出発しています。

6 見分け方

- 拘束条件があり、成分ごとの力が煩雑ならラグランジアンが有効です。
- T と U が書きやすい系では、ラグランジュ方程式が有力です。
- 力を追うより、「自由度を何で表すか」を考える段階で解析力学を使います。

7 どこまで成り立つか

ここでは $L = T - U$ の形で書ける保存力の問題を中心に扱いました。非保存力や拘束条件の厳密な扱いは、その先の講義で補います。
とくに $L = T - U$ をそのまま使うときは、座標の選び方によって T の形は変わっても、物理的な運動方程式は同じになる、という見方が背景にあります。また非保存力が入る場合や速度依存の力を扱う場合は、一般化力を別に入れるなどの拡張が必要です。

8 最終形

$$\boxed{L = T - U}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

9 一言でいうと

- ラグランジアンは、エネルギーの形から運動方程式を作るための中心的な道具です。