解析力学の入口

1　導入

この講義で最重要なのは、**解析力学では 力 を 1 つずつ分解して追うのではなく、一般化座標とエネルギーから運動を記述する**ということです。
ニュートン力学は 強力 ですが、拘束条件がある系では反力まで全部書くのが煩雑になります。そこで解析力学では、必要な自由度だけで問題を書き直します。

2　用語と定義

一般化座標(Generalized coordinates) とは、系の 状態 を記述するのに必要な独立な座標です。
ラグランジアン(Lagrangian) は

$$L = T - U$$

で定義される 量 です。
ラグランジュ方程式(Lagrange equation) は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

です。

3　方針

解析力学では、まず系の自由度を見抜いて一般化座標 q_i を選びます。そのあと T と U を書き、$L = T - U$ から運動方程式を作ります。
ここで大切なのは、公式だけ覚えることではなく、「なぜ x, y ではなく θ を選ぶのか」「なぜ 反力 を 直接書かずにすむのか」を先に見ることです。

4　直感的な説明

解析力学は、「何が動けるか」だけを座標にして、動けない方向は最初から消してしまう方法です。これによって拘束力を細かく追わなくても本質だけが残ります。

5　厳密な説明

5.1　1. 一般化座標を選ぶ理由

たとえば長さ ℓ の振り子では、質点の位置を x, y で書くこともできますが、拘束条件

$$x^2 + y^2 = \ell^2$$

があるので独立ではありません。つまり x, y をそのまま使うと、実際には動けない方向まで含んでしまいます。

そこで角度 θ を一般化座標に取ります。これなら自由度が 1 つであることが、そのまま座標の個数に反映されます。

5.2 2. 振り子の T と U

位置を

$$x = \ell \sin\theta, \qquad y = -\ell \cos\theta$$

とすると、

$$\dot{x} = \ell\dot{\theta}\cos\theta, \qquad \dot{y} = \ell\dot{\theta}\sin\theta$$

です。したがって

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \ell^2\dot{\theta}^2$$

なので

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2, \qquad U = mg\ell(1-\cos\theta)$$

となります。ここで U は最下点を 0 とした位置エネルギーです。

5.3 3. ラグランジュ方程式へ入れる

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta)$$

です。これをラグランジュ方程式へ入れると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}$$

だから

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\ddot{\theta}$$

です。また

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell\sin\theta$$

なので

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0$$

を得ます。

6 具体例

小振動では $\sin\theta \approx \theta$ なので

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

となり、単振動の方程式が出ます。ここで、力を接線方向に分解し直さなくても同じ式に到達できます。

7　別の見方

ニュートン力学が「力から加速度へ」という局所的な見方なら、解析力学は「系の全体のエネルギーから運動方程式へ」という構造的な見方です。

このとき重要なのは、張力のような拘束力を途中で明示的に書かなくてよいことです。一般化座標をうまく選ぶことで、最初から本質的な自由度だけを追えます。

8　どこまで成り立つか

ここでは $L = T - U$ と書ける保存力の問題を前提にしています。摩擦のような非保存力が強く効く場合や、一般化座標の扱いが複雑な拘束を持つ場合は、そのままでは済みません。

9　見分け方

- 拘束条件が多く、力を全部書くのが煩雑なら解析力学を考える
- 自由度を減らせるなら、一般化座標で書き直す
- 保存則や対称性を前面に出したいときにも相性がよい

10　関連リンク

→ 講義 **保存則の導出** lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/保存則の導出-講義/

→ 講義 **円運動と単振動** lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/円運動と単振動-講義/