

ガウスの法則の基本

1 導入

この講義で最重要なのは、ガウスの法則を「電荷と電場の流束を結ぶ基本法則」として理解し、対称性があるときの計算の起点として使えるようにすることです。

電磁気で混乱しやすいのは、ガウスの法則が「いつでも正しい」と、「いつでもすぐに E を解ける」とを混同することです。ここでは、その違いを明確にします。

2 用語と定義

電気流束とは、面を貫く電場の総量を表す量です。

Electric flux

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

ガウスの法則は、

Gauss's law

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

です。

3 方針

まず流束がなぜこの形で定義されるかを見ます。そのあとガウスの法則が、閉曲面の中の電荷だけを見る法則であることを押さえ、平面对称・球対称の例で、どのように E を取り出すかを説明します。

→ [講義 電場と電位](#) [lecture](#) [physics](#) [electromagnetism](#)
<https://study.bem130.com/lecture/physics/electromagnetism/電場と電位-講義/>

4 直感的な説明

電場の線が面をどれだけ貫くかを見ると、その面の中にどれだけ電荷があるかにつながります。面の形を変えても、中の電荷が同じなら、閉じた面を通る総量は変わりません。

5 厳密な説明

5.1 1. なぜ流束を $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ で測るのか

面積ベクトル $d\vec{S}$ は、面に垂直で大きさが小面積 dS です。したがって

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos \theta$$

は、その面を垂直に貫く電場の成分だけを数えています。平行な成分は面を通り抜けないので、流束に寄与しません。

5.2 2. ガウスの法則の意味

ガウスの法則

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

は、閉曲面を貫く流束が、その中にある電荷 Q_{enc} だけで決まることを表しています。外側の電荷は電場を作りますが、入る線と出る線が打ち消し合うので、流束の総和には効きません。

5.3 3. 平面对称での使い方

面電荷密度 σ の無限平面を考えます。面積 S の薄い円柱をガウス面に取ると、側面では電場が平行なので流束は0です。よって

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

となり、

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

です。

ここで本質なのは、対称性のおかげで「上面でも下面でも E の大きさが同じ」「向きが面に垂直」と言えることです。これが言えないなら、ガウスの法則は正しくても、 E を簡単には求められません。

5.4 4. 球対称での使い方

点電荷 Q を中心にもつ半径 r の球面を取ると、球面のどこでも E の大きさが同じで、向きは法線と一致します。したがって

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

より

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

です。これはクーロンの法則の場としての書き方と一致します。

6 見分け方

- 球対称、円筒対称、平面对称があるなら、まずガウスの法則を疑います。
- 電場の向きと大きさを、面の外へ出せるかどうかを先に確認します。
- 対称性が弱いなら、ガウスの法則そのものより、クーロンの法則や別の方法を考えます。

7 どこまで成り立つか

ガウスの法則はいつでも正しい基本法則です。しかし E を簡単に求める計算道具として強いのは、強い対称性があるときです。対称性が足りない場合、積分形を書けても未知の E を面積分の外へ出せません。

8 別の見方

8.1 対称性から場を出す見方

球対称、円筒対称、平面对称の問題で E を出す道具として使います。

8.2 全体像の中で見る見方

ガウスの法則は、マクスウェル方程式の 1 本目そのものです。電場の発散が電荷密度とつながる、という微分形の見方へ進む入口にもなります。

→ [講義](#) [マクスウェル方程式の入口](#) [lecture](#) [physics](#) [electromagnetism](#)
<https://study.bem130.com/lecture/physics/electromagnetism/マクスウェル方程式の入口-講義/>

9 最終形

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

10 一言でいうと

- ガウスの法則は、閉曲面を貫く電場の総量を内側の電荷と結ぶ法則で、対称性があるときに電場を求める起点として強力です。

11 関連リンク

→ [講義](#) [電場と電位](#) [lecture](#) [physics](#) [electromagnetism](#)
<https://study.bem130.com/lecture/physics/electromagnetism/電場と電位-講義/>

→ [講義](#) [コンデンサー](#) [lecture](#) [physics](#) [electromagnetism](#)
<https://study.bem130.com/lecture/physics/electromagnetism/コンデンサー-講義/>

→ [講義](#) [マクスウェル方程式の入口](#) [lecture](#) [physics](#) [electromagnetism](#)
<https://study.bem130.com/lecture/physics/electromagnetism/マクスウェル方程式の入口-講義/>