仕事と力学的エネルギー

1 導入

このページの核心は、**時間を細かく追いたくないとき、力を仕事の形に変換すると、始点と終点だけで速さを読める**という点にある。運動方程式は強力であるが、途中の時刻ごとの運動を全部追う構造をもつ。これに対し、仕事とエネルギーの見方は、経路の各点での時間情報ではなく、**どの力がどれだけ移動方向へ寄与したか**に注目する。したがって、落下、斜面、ばね、摩擦を含む問題で、始点と終点の関係だけを知りたいときに特に有効である。

2 このページで解けるようになること

- 仕事 $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ の意味と符号
- 運動エネルギーの変化 $\Delta K = W_{\mathrm{net}}$ の導出
- 保存力から位置エネルギーを定義する意味
- 力学的エネルギー保存則を使って速度や高さを求める判断
- 摩擦がある場合に、なぜ単純な保存則が壊れるかの理解

3 何を解くページか

このページの本線は、次の二段階である。

1. 合力の仕事から運動エネルギーの変化を求める
2. 保存力の仕事を位置エネルギーへ置き換えて、始点と終点の関係式を作る

したがって、求めたいものが「ある時刻の加速度」ではなく、「ある位置での速さ」「何メートル上がるか」「ばねがどれだけ縮むか」であるときに、このページの方針が自然になる。

4 方針

このページで最初に採る方針は、力をそのまま追うことではなく、**力と変位の内積を取って仕事へ変換することである**。理由は、運動方程式

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

の両辺に $d\vec{r}$ を内積すると、右辺がそのまま仕事の微小量 $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ になるからである。さらに、扱う力が保存力なら、その仕事を位置エネルギーの減少 $-dU$ と読み替えられる。すると途中の時刻を消して

$K + U = \mathrm{const}$

という始点と終点の式へ進める。

5 適用条件

- $\Delta K = W_{\mathrm{net}}$ は慣性系での Newton の法則を前提に導く
- $K + U = \mathrm{const}$ は、非保存力のする仕事が 0 のときに限って使う
- 摩擦や空気抵抗があるなら、まず全仕事の式へ戻る
- 位置エネルギーは、保存力に対してのみ導入する

6 用語と定義

6.1 仕事
Work

仕事は、力と変位の内積で定義される。

$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

一定力で直線運動なら

$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos\theta$

である。

6.1.1 なぜ内積なのか

力の大きさだけでは、運動をどれだけ変えるかは決まらない。移動方向と同じ向きの成分だけが、速さを変える向きに寄与する。したがって、移動方向への射影を自動的に取り出す内積が現れる。

6.2 運動エネルギー
Kinetic energy

$K = \frac{1}{2}mv^2$

これは暗記すべき記号ではなく、仕事と結びつく量として導かれる。

6.3 保存力 と 位置エネルギー
Conservative force Potential energy

保存力とは、仕事が経路に依らず、始点と終点だけで決まる力である。このとき

$U(B) - U(A) = -\int_A^B \vec{F}_{\mathrm{cons}} \cdot d\vec{r}$

によって位置エネルギー U を定義できる。したがって微小形では

$dU = -\vec{F}_{\mathrm{cons}} \cdot d\vec{r}$

である。

6.4 各力の仕事と合力の仕事

この区別は必須である。

- 各力の仕事: 重力の仕事、摩擦力の仕事、弾性力の仕事などを個別に整理する
- 合力の仕事: 全ての力の和がした仕事として全体を整理する

常に成り立つのは

$\Delta K = W_{\mathrm{net}}$

であり、ここで W_{net} は合力の仕事、すなわち各力の仕事の総和である。

7 何を最初に見分けるか

- 途中の時間変化まで必要か、それとも始点と終点だけでよいか
- 摩擦や空気抵抗などの非保存力が仕事をするか
- 求めたいものが速さ・高さ・ばねの変位のような「前後比較」かどうか

これらを確認すると、運動方程式で進むか、エネルギーへ切り替えるかを判断しやすい。

8 導出または基本式

8.1 1. 仕事と運動エネルギーの関係

Newton の法則

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

の両辺に $d\vec{r}$ を内積する。

$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

ここで

$d\vec{r} = \vec{v}dt$

であるから、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

となる。したがって

$dK = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dW$

ゆえに積分して

$$\boxed{\Delta K = W_{\mathrm{net}}}$$

を得る。

8.1.1 単位確認

$\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = \cdot ==$

であり、仕事と同じ単位になる。

8.2 2. 位置エネルギーの導入

保存力 $\vec{F}_{\mathrm{cons}}$ に対して

$dU = -\vec{F}_{\mathrm{cons}} \cdot d\vec{r}$

と定める。このとき、保存力の仕事は

$W_{\mathrm{cons}} = -\Delta U$

と書ける。よって、非保存力のする仕事を W_{nc} と書くと

$\Delta K = W_{\mathrm{cons}} + W_{\mathrm{nc}} = -\Delta U + W_{\mathrm{nc}}$

すなわち

$\Delta(K+U) = W_{\mathrm{nc}}$

を得る。特に

$W_{\mathrm{nc}} = 0$

なら

$$\boxed{K + U = \mathrm{const}}$$

である。この書き方にすると、**力学的エネルギー保存則は非保存力の仕事が 0 の特別な場合**だと明確になる。

非保存力が仕事をするなら、保存ではなく

$\Delta(K+U) = W_{\mathrm{nc}}$

と書く。ここで W_{nc} は非保存力の仕事である。

8.3 3. 代表的な位置エネルギー

8.3.1 重力

鉛直上向きを h とすると

$U_g = mgh$

である。基準高さは任意であるが、途中の式では一貫させなければならない。

8.3.2 ばね

自然長からの変位を x とすると

$U_s = \frac{1}{2}kx^2$

である。

9 具体例 1: 自由落下

高さ h から静かに落とした質量 m の物体の地面直前の速さを求める。方針は、時間を追わず、始点と終点だけで整理することである。非保存力を無視するなら

$K_i + U_i = K_f + U_f$

である。初期状態と終状態を代入すると

$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0$

したがって

$v = \sqrt{2gh}$

を得る。ここでは加速度 g を時間で積分していない点が重要である。

10　具体例 2: ばねに衝突する物体

水平面上を速さ v_0 で進む質量 m の物体が、摩擦なしでばね定数 k のばねに衝突し、最大圧縮 $x_{\max}$ に達する。最大圧縮点では速さが 0 であるから

$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx_{\max}^2$

よって

$x_{\max} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$

となる。

11　比較例: 摩擦がある斜面

摩擦があるとき、単純な

$K + U = \mathrm{const}$

は使えない。たとえば動摩擦力 f_k が一定なら

$\Delta K + \Delta U = W_{\mathrm{fric}}$

と書く。ここで

$W_{\mathrm{fric}} = -f_k\ell$

であり、右辺が負になることが力学的エネルギーの減少を表す。

12　どこまで成り立つか

- $\Delta K = W_{\mathrm{net}}$ は慣性系で常に成り立つ
- $K + U = \mathrm{const}$ は非保存力の仕事が 0 のときに限る
- 位置エネルギーの基準値そのものは任意だが、差は任意ではない
- 空気抵抗や摩擦が無視できない問題では、保存則だけで押し切ってはならない

13　よくある誤り

- 合力の仕事と、重力や摩擦力の個別の仕事を混同する
- 摩擦があるのに $K + U = \mathrm{const}$ を使う
- 位置エネルギーの基準点を途中で変更して式を壊す
- 仕事の符号を、力の向きだけで決め、変位の向きを確認しない

14　解法の選択

- 時間や加速度の途中経過が必要 → 運動方程式
- 始点と終点の速度・高さ・ばねの変位だけ知りたい → エネルギー
- 短時間衝突の前後を比較したい → 運動量と力積

15　仕事率とエネルギーの時間変化

仕事は力の累積効果であり、仕事率はその時間変化である。

$P = \frac{dW}{dt}$

力 $\vec{F}$ が速度 $\vec{v}$ の物体に働くとき、

$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

である。力が速度と同じ向きなら運動エネルギーを増やし、逆向きなら減らす。速度に垂直な力は、その瞬間には仕事をしない。たとえば等速円運動の向心力は速度に垂直なので、速さを変えず、向きだけを変える。

16　経路に依存する仕事と依存しない仕事

保存力の仕事は始点と終点だけで決まり、途中の道筋には依存しない。重力や理想的なばねの力がその例である。このとき位置エネルギー U を導入できる。

一方、摩擦力の仕事は移動距離に依存する。同じ高さから同じ高さへ移動しても、長い経路を通れば摩擦の仕事は大きくなる。したがって、摩擦がある問題では高低差だけでなく、実際に動いた距離を確認する。

17　位置エネルギー曲線の読み方

1 次元で位置エネルギー $U(x)$ が分かっているとき、保存力は

$F(x) = -\frac{dU}{dx}$

で与えられる。位置エネルギーが右へ増えるなら、力は左向きに働く。これは物体が位置エネルギーを下げる向きへ動こうとする、という意味である。

平衡位置では

$\frac{dU}{dx} = 0$

である。その点が U の最小なら安定平衡、最大なら不安定平衡である。ばねの $U = \frac{1}{2}kx^2$ は $x = 0$ で最小をもつので、そこが安定な平衡位置になる。

18　エネルギー式の選択表

状況	使う式	注意
合力の仕事が分かる	$\Delta K = W_{\mathrm{net}}$	常に基本へ戻れる
保存力だけが仕事をする	$K + U = \mathrm{const}$	摩擦・空気抵抗がないか確認する
非保存力が仕事をする	$\Delta(K + U) = W_{\mathrm{nc}}$	摩擦なら移動距離を確認する
力が位置で変わる	$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$	経路に依存するかを確認する

19 追加例: 摩擦で止まる距離

水平面で速さ v_0 の物体が動摩擦力だけで止まる距離を求める。力の向きは運動と逆向きなので、摩擦の仕事は

$W_{\mathrm{fric}} = -\mu_k mgd$

である。仕事と運動エネルギーの関係より

$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_k mgd$

したがって

$$\boxed{d = \frac{v_0^2}{2\mu_k g}}$$

を得る。この問題では $K + U = \mathrm{const}$ ではなく、非保存力の仕事を右辺に入れる。

20 まとめ

仕事とエネルギーの方法は、力を忘れる方法ではなく、**力を変位と結びつけて別の形で読む方法**である。

常に成立する基本式は

$\Delta K = W_{\mathrm{net}}$

であり、保存力だけが仕事をするなら

$K + U = \mathrm{const}$

へ簡約される。非保存力が仕事をするなら

$\Delta(K + U) = W_{\mathrm{nc}}$

として扱う。

21 次に読むべきページ

→ 講義 **保存則の導出** lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/保存則の導出-講義/

→ 講義 **運動量と力積** lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/運動量と力積-講義/

22 エネルギー式を立てる前の確認

エネルギーで解く問題では、始点と終点を先に決める。その間で速さ、高さ、ばねの伸び、摩擦の移動距離がどのように変わるかを表にすると、入れるべき項が抜けにくい。

保存力だけなら $K + U$ は一定である。摩擦や外力が仕事をするなら、変化した力学的エネルギーはその仕事に等しい。力を全部エネルギーに入れるのではなく、保存力として位置エネルギーに入れるものと、仕事として右辺に置くものを分けることが重要である。

標準的には、始点を i、終点を f として

$K_i + U_i + W_{\mathrm{nc}} = K_f + U_f$

と置く。この式では、非保存力の仕事 W_{nc} [J; ML^2T^{-2}] を左辺へ入れている。右辺へ移す書き方もできるが、符号が逆になるので、同じ問題の中では形を統一する。

23 文字式の単位

仕事 W [J; ML^2T^{-2}] は、力 F [N; MLT^{-2}] と変位 d [m; L] の積として現れる。$Fd\cos\theta$ [J; ML^2T^{-2}] では、θ [rad; 1] は向きだけを表し、単位を変えない。

運動エネルギー K [J; ML^2T^{-2}] は $\frac{1}{2}mv^2$ [J; ML^2T^{-2}] であり、m [kg; M]、v [m/s; LT^{-1}] から [$\mathrm{kg\,m^2/s^2}$] = [J] になる。重力による位置エネルギー $U = mgh$ [J; ML^2T^{-2}] では、m [kg; M]、g [$\mathrm{m/s^2}$; LT^{-2}]、h [m; L] である。仕事率 P [W; ML^2T^{-3}] は $\frac{dW}{dt}$ [J/s; ML^2T^{-3}] であり、単位は [W] である。

24 エネルギーで解くときの落とし穴

エネルギーの式では、途中の時間や加速度を消せる。その代わり、どの力が仕事をしたかを正確に数える必要がある。重力やばね力を位置エネルギーに入れたなら、同じ仕事を右辺にもう一度入れてはいけない。

摩擦の仕事では、変位ではなく接触面上を滑った距離が必要になる。物体の始点と終点の距離 d [m; L] と、摩擦が作用した道のり s [m; L] は同じとは限らない。摩擦の仕事 W_{fric} [J; ML^2T^{-2}] は、大きさが一定なら $W_{\mathrm{fric}} = -fs$ [J; ML^2T^{-2}] と読む。

25 エネルギーだけで足りない場合

エネルギーの式は速さの大きさを決めるのに強いが、向きや時間を直接は決めにくい。たとえば

$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E$

から分かるのは v^2 [$\mathrm{m^2/s^2}$; L^2T^{-2}] であり、v [m/s; LT^{-1}] の符号は運動の向きを別に判断する必要がある。時間を求めるなら、さらに $v = dx/dt$ [m/s; LT^{-1}] や運動方程式を使う。

エネルギーは速さの大きさを求めるのに強いが、向きの情報を失いやすい。$K = \frac{1}{2}mv^2$ [J; ML^2T^{-2}] は v [m/s; LT^{-1}] の二乗で決まるため、右向きと左向きを区別しない。

衝突や分裂のように向きが重要な問題では、運動量の式を併用する。円運動のように向きが刻々と変わる問題では、半径方向の力の式も必要になる。

26 グラフから仕事を読む

力が位置によって変わるとき、仕事は力と変位の積を足し合わせたものである。したがって、$F-x$ グラフでは、曲線と横軸に囲まれた面積が仕事 W [J; ML^2T^{-2}] を表す。
力が一定なら、面積は長方形であり、$W=Fd$ [J; ML^2T^{-2}] になる。力が 0 から直線的に増えるなら、面積は三角形であり、ばねの仕事や位置エネルギーに現れる $\frac{1}{2}kx^2$ [J; ML^2T^{-2}] とつながる。
グラフが横軸より下にある部分は、負の仕事を意味する。進行方向と逆向きに力が働くと、運動エネルギーは減る。この符号まで読むことが、面積を使う目的である。

27 エネルギー図で運動範囲を読む

位置エネルギー U [J; ML^2T^{-2}] を縦軸、位置 x [m; L] を横軸にした図では、全エネルギー E [J; ML^2T^{-2}] との差が運動エネルギー K [J; ML^2T^{-2}] である。つまり $K=E-U$ [J; ML^2T^{-2}] である。
E [J; ML^2T^{-2}] より U [J; ML^2T^{-2}] が大きい領域では、K [J; ML^2T^{-2}] が負になってしまうため、古典力学では到達できない。折り返し点では $K=0$ [J; ML^2T^{-2}]、したがって速さ $v=0$ [m/s; LT^{-1}] になる。力の式を解かなくても、運動できる範囲を図から読める。

28 エネルギー式の誤答パターン

力学的エネルギーを使うときの典型的な誤りは、保存力の仕事を位置エネルギーにも入れ、さらに外力の仕事としてもう一度足すことである。重力を mgh [J; ML^2T^{-2}] として位置エネルギーに入れたなら、重力の仕事を別に右辺へ入れない。
摩擦では、仕事の符号に注意する。動摩擦力は相対運動に逆らうので、通常は負の仕事をする。摩擦の仕事を正にしてしまうと、物体が自然に加速するような不自然な答えになる。

29 単位で足し算を検査する

エネルギーの式では、足してよいのはすべて [J] の項だけである。たとえば

$$\frac{1}{2}mv^2+mgh+\frac{1}{2}kx^2=E$$

では、運動エネルギー、重力による位置エネルギー、ばねの位置エネルギーがすべて [J] でそろう。途中で [N] や [m/s] の項をそのまま足していたら、式の立て方を見直す。
エネルギーの式では、足してよい項はすべて [J] でなければならない。K [J; ML^2T^{-2}]、U [J; ML^2T^{-2}]、W [J; ML^2T^{-2}] は足せるが、力 F [N; MLT^{-2}] や距離 x [m; L] をそのまま足してはいけない。力をエネルギーの式に入れるには、距離との積として仕事 Fx [J; ML^2T^{-2}] にする必要がある。

式の途中で単位を添えると、足せない量を混ぜた時点で誤りに気づける。数値の大小より前に、単位が同じかを見る。

30　主要文字式の単位確認

仕事 W [J; ML^2T^{-2}]、運動エネルギー K [J; ML^2T^{-2}]、位置エネルギー U [J; ML^2T^{-2}]、全エネルギー E [J; ML^2T^{-2}] は同じ単位をもつ。力 F [N; MLT^{-2}] と変位 d [m; L] の積 Fd [J; ML^2T^{-2}] が仕事である。$K = \frac{1}{2}mv^2$ では、m [kg; M]、v [m/s; LT^{-1}]、mv^2 [kg m^2/s^2; ML^2T^{-2}] = [J] である。$U = mgh$ では、m [kg; M]、g [m/s^2; LT^{-2}]、h [m; L] から mgh [J; ML^2T^{-2}] が出る。仕事率 P [W; ML^2T^{-3}] は W [J; ML^2T^{-2}] を t [s; T] で割った量である。

31　数式内での単位明示

仕事の式は

$W = F \times d \times \cos\theta$

である。運動エネルギーと重力による位置エネルギーも、文字式の段階で単位を持たせる。

$K = \frac{1}{2}mv^2, \qquad U = mgh$

32　始点・終点・途中を分ける

エネルギーの式では、始点と終点の状態だけで決まる量と、途中の経路に依存する量を分ける。運動エネルギー K [J; ML^2T^{-2}] と位置エネルギー U [J; ML^2T^{-2}] は状態の量である。一方、摩擦の仕事 W_{fric} [J; ML^2T^{-2}] は、途中で滑った距離 s [m; L] に依存する。

問題を解くときは、始点の K [J; ML^2T^{-2}]、U [J; ML^2T^{-2}]、終点の K [J; ML^2T^{-2}]、U [J; ML^2T^{-2}]、途中で働く非保存力の仕事 W_{nc} [J; ML^2T^{-2}] を表にする。この表を作ると、入れ忘れと二重計上を防ぎやすい。

答えが速さ v [m/s; LT^{-1}] なら、最終的に平方根を取ることが多い。平方根の中が負になるなら、その状態には到達できないか、エネルギー式の符号が誤っている。

33　エネルギーの損失をどこへ置くか

力学的エネルギーが保存しない問題では、失われた量を式のどこに置くかを決める。摩擦で熱に変わるなら、非保存力の仕事 W_{nc} [J; ML^2T^{-2}] として右辺に置ける。衝突で変形や音に変わるなら、失われたエネルギーを Q [J; ML^2T^{-2}] のように置いて収支を書ける。

重要なのは、消えたのではなく、力学的エネルギーとして追跡していない形へ移ったと読むことである。力学的エネルギーが減るとき、熱や変形まで含めた広い意味のエネルギーは保存している。

式を立てるときは、左辺と右辺の全項が [J] であることを確認する。K [J; ML^2T^{-2}]、U [J; ML^2T^{-2}]、W_{nc} [J; ML^2T^{-2}]、Q [J; ML^2T^{-2}] は足し引きできるが、力 F [N; MLT^{-2}] や距離 x [m; L] をそのまま混ぜてはいけない。