剛体のつり合いの基本

1　導入

この講義の核心は、**剛体のつり合いには「合力が 0」と「任意の点まわりの力のモーメントの和が 0」の 2 条件が必要かつ十分である**ことである。質点では力の和だけを見れば十分だった。しかし剛体は回転もできるため、並進のつり合いだけでは不十分である。作用点が違えば同じ力でも回転効果が異なる。

2　このページで解けるようになること

- 棒・はしご・板などの剛体静力学問題を立式する
- 支点や接点を基準点に選んで不要な未知数を消す
- 重心を用いて自重の作用点を決める
- 静止条件と未知数の数を照合する

3　方針

自由体図を描いて全ての力を切り出し、まず並進の条件 $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ を書く。そのうえで、**未知反力を消したい点を基準点に選んで** $\sum \tau_O = 0$ を立てる。この点選択が計算を楽にする。

4　適用条件

- このページの本線は静止している剛体、または準静的に扱える状況である
- 変形は無視し、剛体として近似する
- 平面内の問題を前提とし、モーメントは時計回り・反時計回りの符号で管理する

5　用語と定義

5.1　剛体
Rigid body

剛体
Rigid body
とは、力を加えても変形しない理想的な物体である。内部の任意の 2 点の距離が変化しない。**「剛」という命名**：rigid（硬い・変形しない）の訳。実際の物体は弾性変形するが、変形が無視できる場合に剛体で近似する。

5.2　力のモーメント
Torque

点 O のまわりの力のモーメントは

$\tau = r \cdot F \cdot \sin\theta = F_\perp \cdot r = F \cdot r_\perp$

ここで θ は $\vec{r}$ と $\vec{F}$ のなす角、$F_{\perp}$ は腕に垂直な力の成分、$r_{\perp}$（「腕の長さ」）は力の作用線から O への垂直距離。**符号の約束**：反時計回りを正（+)、時計回りを負（−）とするのが一般的。**定義が実現する性質**：同じ力でも作用点が O から遠いほどモーメントが大きい。作用線が O を通る力のモーメントは 0。

5.2.1 静力学の 2 条件の意味

条件	式	意味
並進のつり合い	$\sum \vec{F} = \vec{0}$	剛体が平行移動しない
回転のつり合い	$\sum \tau_O = 0$	剛体が点 O のまわりで回転しない

2 条件を同時に満たすとき剛体は静止する。

6 直感的な説明

扉を押すとき、蝶番に近いほど開けにくく、端ほど開けやすい。これは腕の長さ $r_{\perp}$ が大きいほどモーメントが大きくなるからである。重心が支持基底の内側にあると倒れず、外側に出ると倒れる—これがモーメントの観点から安定を判定する方法である。

6.1 三力だけでつり合う剛体

剛体に働く力が 3 本だけで、かつ互いに平行でないとき、つり合いが成り立つなら、その 3 本の作用線は 1 点で交わる。もし 2 本の作用線の交点を O とすると、その 2 本のモーメントは O まわりで 0 である。残る 1 本の作用線が O を通らなければ、モーメントが残って回転してしまう。
この見方は、はしごや棒に 3 力だけが働く問題で、反力の向きを幾何学的に決めるときに有効である。

7 厳密な説明

7.1 1. つり合いの 2 条件の導出

剛体が静止しているとき $\vec{a} = 0$、$\alpha = 0$。重心の運動方程式（$M\vec{a} = \sum \vec{F}$）より

$\sum \vec{F} = \vec{0}$

任意の点 O まわりの角運動量の方程式（$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$）より $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ なので

$\sum \tau_O = 0$

重要な点：モーメントの条件は**どの点 O を選んでも同値**である（並進のつり合いが成立している限り）。したがって O を自由に選べる。

7.2 2. 立式の手順

1. 自由体図を描く：全ての力（重力・垂直抗力・張力・摩擦力）を矢印で描く
2. 座標を設定する（水平 x・鉛直 y）

3. $\sum F_x = 0$、$\sum F_y = 0$ を立式する
4. 未知の 力 が多く交わる点を O に選び $\sum \tau_O = 0$ を立式する
5. 連立方程式を解く

7.3 3. 点の選び方

基準点 O は任意に選べるが、実戦では次の方針が有効である。

- 未知反力が 集中 する支点を選ぶ
- その点を通る 力 のモーメントを 0 にして未知数を減らす
- 重力 や 張力 など、位置が明確な 力 を残す

7.4 4. 具体例：一様な棒を 2 点で支える

長さ L、質量 M の一様な棒を両端から a、b（$a + b = L$）の位置で支える。支持力を N_1（左端から a)、N_2（左端から $a + b = L$）とすると：**鉛直のつり合い：**

$N_1 + N_2 = Mg$

N_1 の作用点まわりのモーメント：

$N_2 \cdot b - Mg \cdot \left(\frac{L}{2} - a\right) = 0$

$N_2 = \frac{Mg(L/2-a)}{b}$、$N_1 = Mg - N_2$。重心が 2 点の内側にある（$a < L/2 < a + b$）とき、$N_1 > 0$・$N_2 > 0$ となりつり合いが実現する。

7.5 5. 具体例：はしごの問題

長さ L、質量 M のはしごを壁（滑らか）に立てかける（床との角は θ)。作用する 力 ： 重力 Mg（重心)、床の 垂直抗力 N、床の摩擦力 f、壁の 垂直抗力 R（壁は滑らかなので摩擦なし)。**水平のつり合い**：$R = f$

鉛直のつり合い：$N = Mg$

床接点まわりのモーメント（R・f・N のモーメントが 0 になる点を選ぶ)：

$R \cdot L \sin\theta - Mg \cdot \frac{L}{2} \cos\theta = 0$

$R = \frac{Mg\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{Mg}{2\tan\theta}$

滑らない条件：$f \leq \mu_s N$、すなわち $R \leq \mu_s Mg$、つまり $\tan\theta \geq \frac{1}{2\mu_s}$（傾斜が十分 急 であること)。

7.6 6. 安定と支持基底

剛体が倒れないためには重心の真下が支持基底（接地面積の凸包）の内側にある必要がある。重心が外側に出ると、 重力 のモーメントが倒れる方向に作用し復元力がなくなる。

8 見分け方

- 棒・はしご・板・てこ・橋などが登場したら → 剛体のつり合い
- 力 が 3 個以上、方向が多様 → $\sum F_x = 0$・$\sum F_y = 0$・$\sum \tau_O = 0$ の 3 本を立式する
- 未知数が多い → O を未知の 力 の交点に選ぶとモーメント式に未知数が減る

- 「倒れるか」→ 重心の真下が支持基底の内側か外側かを確認する

9 このページでは扱わないこと

- 回転しながら動く剛体の運動方程式
- 慣性モーメントを使う動力学
- 角運動量保存を使う非静的な問題

10 転倒の境界条件

剛体が複数の接点で支えられているとき、転倒の直前にはどれか 1 つの接点の垂直抗力が 0 になる。床や支点は押すことはできても引くことはできないので、反力が負になる解は物理的に実現しない。

計算では、まず接触が保たれていると仮定して反力を求める。結果として $N = 0$ になった条件が転倒や浮き上がりの境界であり、$N < 0$ ならその接触はすでに失われている。

11 モーメントの符号を決める手順

モーメントの符号は、力そのものの向きではなく、基準点まわりに回そうとする向きで決める。

1. 基準点 O を決める
2. 力の作用線を延長する
3. その力だけが働いたら O まわりに時計回りか反時計回りかを判断する
4. 最初に決めた正の回転方向に合わせて符号を付ける

腕の長さだけを見て符号を決めると誤りやすい。符号は必ず「どちらへ回そうとするか」で決める。

12 力の作用線で考える

モーメントを計算するとき、力の作用点だけでなく作用線を見ると見通しがよい。作用線が基準点 O を通る力は、O まわりのモーメントが 0 である。

未知の力が多い問題では、複数の未知力の作用線が交わる点を基準点に選ぶと、それらのモーメントを同時に消せる。支点や接点を基準点に選ぶ理由は、計算を楽にするだけでなく、未知数を式から消すためである。

13 どこまで成り立つか

剛体の仮定（変形なし）が成立する範囲で適用できる。弾性体や塑性変形を伴う場合は変形の効果を別途考慮する。モーメントの条件は任意の O で成立するが、全ての O のモーメント式が独立しているわけではない（独立な条件は平面問題で 3 本）。

14 よくある誤り

- 支点を基準点に選ばず、不要な未知数を残したまま計算する
- 重力の作用点を重心ではなく端に置く
- モーメントの符号を途中で変える
- 静止問題なのに ma や $I\alpha$ を混ぜる

15 最終形

並進のつり合いは合力で、回転のつり合いは任意の点 O まわりの力のモーメントで判定する。

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}}$$

$$\boxed{\sum \tau_O = 0}$$

点 O をどこに選んでもよいのは、並進のつり合い $\sum \vec{F} = \vec{0}$ が同時に成り立つからである。基準点を移すとモーメントの和には「移動した位置ベクトル × 合力」が加わるが、合力が 0 ならその差は消える。

16 一言でいうと

剛体のつり合いは並進と回転の両方を同時に止める 2 条件であり、モーメントの基準点は未知数を消すように自由に選べる。

17 関連リンク

→ 講義 力学ポータル lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/力学ポータル-講義/

→ 講義 回転運動の基本 lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/回転運動の基本-講義/

→ 講義 角運動量の基本 lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/角運動量の基本-講義/

→ 講義 重心の基本 lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/重心の基本-講義/

18 文字式の単位

剛体のつり合いでは、力 F [N; $\mathsf{MLT^{-2}}$] と腕の長さ r [m; L] から、力のモーメント τ [N m; $\mathsf{ML^2T^{-2}}$] が決まる。$\tau = rF\sin\theta$ [N m; $\mathsf{ML^2T^{-2}}$] では、θ [rad; 1] は向きだけを表し、単位は [N m] になる。

力のつり合い $\sum F = 0$ では各項が [N]、モーメントのつり合い $\sum \tau = 0$ では各項が [N m] である。力の式とモーメントの式を足し合わせてはいけないのは、単位が違うからである。

19　基準点の選び方で未知数を減らす

剛体の問題では、力のつり合いだけでは未知数が残ることが多い。そのときは、未知の反力が作用する点を基準点にしてモーメントを取る。作用線が基準点を通る力は、腕の長さが 0 [m; L] なので、その点まわりのモーメントを作らない。

たとえば支点 O の反力が水平成分と鉛直成分をもつときでも、O まわりにモーメントを取れば、その 2 つを同時に消せる。残った力について、$\tau = rF\sin\theta$ [N m; ML^2T^{-2}] を符号つきで足し合わせる。

20　転倒とすべりの競合

物体が倒れるか、すべるかは、別々の条件で判定する。すべりの境界は静止摩擦力 f_s [N; MLT^{-2}] が最大値 $\mu_s N$ [N; MLT^{-2}] に達する条件である。転倒の境界は、垂直抗力の作用線が支持面の端を通る条件である。

どちらが先に起こるかは、両方の臨界条件を比べて決める。摩擦が小さければ倒れる前にすべることが多い。支持面が狭く重心が高い物体では、すべる前に転倒しやすい。

21　腕の長さは垂線距離である

力のモーメントを計算するときの腕の長さは、基準点から作用点までの距離そのものではない。基準点から力の作用線へ下ろした垂線の長さである。

力 F [N; MLT^{-2}] と腕の長さ d [m; L] を使えば、モーメントの大きさは Fd [N m; ML^2T^{-2}] である。斜めの力をそのまま扱いにくいときは、力を成分に分けるか、作用線までの垂線距離を使う。どちらで計算しても同じ結果になる。

22　支点反力を成分で置く

支点が力の向きを自由に変えられるときは、大きさと角度で置くより、成分 R_x [N; MLT^{-2}]、R_y [N; MLT^{-2}] で置くと式が安定する。剛体の平面問題では

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum \tau = 0$$

の 3 本が基本である。未知数が 3 つを超えるなら、接触条件や摩擦条件など追加の情報が必要になる。

支点や接点の反力の向きが分からないときは、無理に 1 本の斜めの力として置かず、水平成分 R_x [N; MLT^{-2}] と鉛直成分 R_y [N; MLT^{-2}] に分ける。式を解いた結果、どちらかが負になれば、仮定した正の向きと逆向きに働いていたと読める。

反力を成分で置くと未知数は増えるが、向きの誤解は減る。未知数が増えた分は、モーメントの基準点を選んで不要な反力を消すことで処理する。

23　主要文字式の単位確認

剛体では、力 F [N; MLT^{-2}]、腕の長さ d [m; L]、力のモーメント τ [N m; ML^2T^{-2}] を区別する。Fd [N m; ML^2T^{-2}] はモーメントであり、仕事 W [J; ML^2T^{-2}] と同じ次元をもつが、意味は回転させる作用である。

力のつり合いでは各項が [N]、モーメントのつり合いでは各項が [N m] でそろう。R_x [N; MLT^{-2}]、R_y [N; MLT^{-2}] のような支点反力の成分は力なので、モーメントに入れるときは腕の長さ [m] を掛ける。

24　数式内での単位明示

力のモーメントは

$\tau = r \times F \times \sin\theta$

である。力のつり合いでは各項が N、モーメントのつり合いでは各項が N m でそろう。

25　剛体問題の解法テンプレート

剛体のつり合いでは、まず力をすべて描く。重力 Mg [N; MLT^{-2}]、支点反力、接触力、張力 T [N; MLT^{-2}] のように、剛体に働く力だけを自由体図に残す。

次に、未知数を減らせる基準点を選ぶ。未知の反力の作用線が通る点を基準点にすれば、その反力のモーメントは 0 [N m; ML^2T^{-2}] になる。

最後に、力のつり合いとモーメントのつり合いを分けて立てる。力の式の各項は [N]、モーメントの式の各項は [N m] である。単位が違う式を混ぜない。

26　荷重が分布している場合

分布荷重 $w(x)$ [N/m; MT^{-2}] は、そのまま 1 個の力ではなく、長さあたりの力である。全荷重は

$$W = \int w(x)dx$$

で求める。作用点は荷重分布の重心であり、

$$x_W = \frac{\int x w(x) dx}{\int w(x) dx}$$

と読める。分子は [N m]、分母は [N] なので、作用点は [m] で表される。

剛体に働く重力は、本当は物体の各部分に分布して働く。しかし一様な重力場では、その合力を重心に作用する Mg [N; MLT^{-2}] として扱える。ここで、M [kg; M] は全質量である。

橋や梁のように、長さに沿って荷重が分布している場合も、合力とその作用位置を求めれば、剛体のつり合いとして扱える。一様分布荷重なら、合力は全荷重であり、作用位置は分布している区間の中央である。この置き換えでは、合力 F [N; MLT^{-2}] だけでなく、作用位置までの距離 d [m; L] も必要である。モーメントは Fd [N m; ML^2T^{-2}] として効くため、同じ合力でも作用位置が変われば回転への影響は変わる。