

力のつり合いと運動の法則

1 導入

このページの核心は、対象とする物体を1つに固定し、その物体の運動状態から式を選ぶことである。力学で最初に崩れやすいのは、公式の暗記ではなく、「どの物体にどの力が作用しているか」の切り分けである。対象を固定し、自由体図を作り、加速度が0かどうかを判定すれば、用いるべき式は

$$\sum \vec{F} = \vec{0}, \quad \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

左の式は静止や等速直線運動の場合であり、右の運動方程式に $a = 0$ を入れた特別な形である。したがって、最初に見分けるべきことは「力があるかないか」ではなく、「加速度を0と置けるか」である。

2 このページで解けるようになること

- つり合いと運動方程式の使い分け
- 自由体図から成分式へ落とす手順
- 作用・反作用の対と、同一物体上の力の区別
- 張力、垂直抗力、重力を含む基本問題の立式

3 自由体図の確認リスト

自由体図を描くときは、次の順で確認すると抜けが少ない。

1. 対象とする物体を1つに決める
 2. 重力を必ず描く
 3. 接触している面ごとに、垂直抗力と摩擦力の有無を判定する
 4. 糸やばねがあれば、張力や弾性力を作用方向つきで描く
 5. 作用・反作用の相手側の力を、同じ自由体図に入れない
- 自由体図の目的は、力を多く描くことではなく、その物体にはたらく外力だけを過不足なく描くことである。

4 代表的な力の一覧

力	大きさ	向き	注意
重力	mg	鉛直下向き	地表付近の近似
垂直抗力	未知	接触面に垂直	面は押すだけで引かない
張力	未知	糸に沿って引く向き	軽い糸では同じ糸の張力は等しい
動摩擦力	$\mu_k N$	相対運動に逆らう	滑っているときだけ使う
静止摩擦力	$ f_s \leq \mu_s N$	相対運動しようとする向きに逆らう	必要なだけ出る

ちから ばねの力	kx	しぜんちやう もど む 自然長へ戻す向き	しぜんちやう へんい x は自然長からの変位
-------------	------	-------------------------	-----------------------------

この表の大きさを暗記しても、対象の物体にはたらいしていない力を描けば誤る。力は種類よりも、まず作用相手で判断する。

5 未知の力の向きを仮定する

張力、垂直抗力、摩擦力の向きが迷うときは、最初に仮の向きを決めて変数を置いてよい。式を解いた結果が正なら仮定した向きで正しく、負なら実際の向きは逆である。

ただし、垂直抗力や張力には物理的な制約がある。垂直抗力は面が押す力なので $N < 0$ にはならない。

糸の張力も引く力なので、軽い糸の理想化では $T < 0$ は糸がたるむことを意味する。

6 何を解くページか

本線は、1物体に対して

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

を立てることである。静止や等速運動なら $m\vec{a} = \vec{0}$ に落ちる。したがって、本質は「別公式が二つある」のではなく、同じ式の右辺が0かどうかである。

7 方針

解法の順序は次のように固定する。この順序は、静止の問題でも加速する問題でも変わらない。

1. 対象とする物体を1つ決める
2. その物体に働く力だけを自由体図にする
3. 軸を決める
4. ベクトル式を成分式へ落とす
5. つり合いか運動方程式かを適用する

このページで最も危険なのは、対象を曖昧にしたまま「力の対」を相殺してしまうことである。作用・反作用は別の物体に働くため、1つの自由体図の中で消してはならない。

8 適用条件

- Newton の法則は慣性系で用いる
- つり合い $\sum \vec{F} = \vec{0}$ は静止だけでなく等速直線運動にも適用する
- ここでは質量一定の範囲で $m\vec{a} = \sum \vec{F}$ を用いる

9 用語と定義

9.1 力

力は物体の運動状態を変える原因である。単位は

=

である。

9.2 合力

ある1物体に働くすべての力のベクトル和である。運動を決めるのは個々の力そのものではなく、その合力である。

9.3 運動方程式

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

である。

9.4 垂直抗力

接触面が物体を面に垂直な方向へ押し返す力である。

9.5 張力

糸や紐が物体を引く力である。理想糸では糸に沿う方向にのみ働く。

10 何を最初に見分けるか

- 加速度が0かどうか
- どの方向に運動が起こるか
- 力を分解したほうがよいか

この判定が済む前に式を書き始めると、符号と方向の混乱が起こる。

11 直感的な説明

力のつり合いと運動方程式は、別々の話ではない。合力が0なら速度は変化せず、合力が0でなければ速度の変化、すなわち加速度が生じる。この見方では、つり合いは「止まっている物体だけの特別な公式」ではなく、運動方程式の右辺が0になった場合である。

12 厳密な説明と基本式

12.1 1. つり合い条件

静止または等速直線運動なら

$$\vec{a} = \vec{0}$$

であるから

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

を得る。ここで重要なのは、つり合いは「止まっていること」ではなく「加速度が0であること」だという点である。

12.2 2. 運動方程式

加速度があるなら

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

をそのまま用いる。速度の向きと加速度の向きは一致しなくてもよい。たとえば減速中なら速度と加速度は逆向きでありうる。

12.3 3. ベクトル式から成分式へ

軸を x, y と決めたら

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y$$

と成分に落とす。したがって、正しい順序はベクトルで立てる → 軸を決める → 成分に落とすである。

13 作用・反作用の区別

Newtonの第3法則によれば、AがBを押す力と、BがAを押す力は大きさが等しく向きが反対である。

しかし、この2つは別の物体に働く。したがって、1物体の運動方程式の中で相殺してはならない。

13.1 典型例

- 床が物体を押す力
- 物体が床を押す力

は作用反作用の対である。しかし、前者は物体に、後者は床に働く。物体だけを取り出すなら、式に入る

のは前者だけである。また、

- 重力
- 垂直抗力

はしばしば大きさが等しくなるが、作用反作用の対ではない。いずれも同一物体に働くからである。

14 具体例 1: 水平面上の物体

質量 m の物体が水平面上で静止している。鉛直方向だけを考えると

$$N - mg = 0$$

であるから

$$N = mg$$

を得る。ここで「静止しているから $N = mg$ 」なのではなく、「鉛直方向の加速度が 0 だから $N - mg = 0$ 」なのである。

15 具体例 2: つり下げられた物体

質量 m の物体が糸で静止してつり下げられているとする。上向きを正とすると

$$T - mg = 0$$

ゆえに

$$T = mg$$

である。

16 具体例 3: エレベーター内の物体

質量 m の物体がエレベーター内で上向き加速度 a をもつとする。上向きを正とすると

$$N - mg = ma$$

より

$$N = m(g + a)$$

となる。ここで N が「見かけの重さ」である。下向き加速度なら a の符号が変わるだけである。

17 このページでは解けない問題

- 衝突の前後を一気に比べたい → 運動量のページへ進む
- 時間を消して速さだけ求めたい → 仕事とエネルギーのページへ進む
- 回転が絡む → 剛体・回転運動のページへ進む

18 どこまで成り立つか

- 慣性系でのみ、そのままの形で用いる
- 質量が変化する系では $m\ddot{a}$ より $\frac{d\vec{p}}{dt}$ の形に戻る
- つり合い条件は各方向ごとに確認する必要がある

19 よくある誤り あやま

- つり合いを「静止だけ」と思い込む あ せいし おも こ
- 作用反作用の対を同一物体上で相殺する きやうはんきやう つい どういつ ぶつたいうえ そうさい
- 軸を決める前に成分式を書き始める じく き まえ せいぶんしき か はじ
- 速度の向きだけで、加速度の向きを決めてしまう そくど む かそくど む き

20 まとめ

力学の出発点は、自由体図と運動状態の判定である。加速度が0ならつり合い、そうでなければ運動方程式である。これを一貫して守ることが、後続のエネルギー、運動量、回転の各ページの土台になる。

21 次に読むべきページ つぎ よ

→ [講義 直線運動と落下運動](#) [lecture](#) [physics](#) [mechanics](#)
<https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/直線運動と落下運動-講義/>

→ [講義 仕事と力学的エネルギー](#) [lecture](#) [physics](#) [mechanics](#)
<https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/仕事と力学的エネルギー-講義/>

22 力の分解で式を減らす ちから ぶんかい しき へ

運動方程式は、成分ごとに立てる。加速度がある向きと、それに垂直で加速度がない向きを先に選ぶと、式の数と未知数の関係が見えやすい。

たとえば斜面では、斜面に平行な方向と垂直な方向を軸にする。垂直方向には物体が飛び出さない限り加速度がないので、垂直抗力を先に求められる。座標軸は水平・鉛直に固定するものではなく、運動を簡単に表すために選ぶものである。

23 文字式の単位 もじしき たんい

運動方程式

$$\sum F = ma$$

では、 $\sum F$ [N; MLT^{-2}]、 m [kg; M]、 a [m/s^2 ; LT^{-2}] である。したがって ma [$kg\ m/s^2$; MLT^{-2}] = [N] となり、

左辺と右辺は力の単位でそろろう。

垂直抗力 N [N; MLT^{-2}]、張力 T [N; MLT^{-2}]、摩擦力 f [N; MLT^{-2}]、重力 mg [N; MLT^{-2}] は、すべて

力として同じ単位をもつ。重力加速度 g [m/s^2 ; LT^{-2}] は力ではなく加速度であり、 m [kg; M] と掛けてはじめて mg [N; MLT^{-2}] になる。

24 接触力を書く基準

自由体図では、物体に直接接触しているもの、または場として作用しているものだけを力として書く。机の上の物体なら、重力 mg [N; MLT^{-2}]、垂直抗力 N [N; MLT^{-2}]、摩擦力 f [N; MLT^{-2}] が候補になる。速度や加速度は力ではないので、矢印として描いても力の一覧には入れない。接触力は、接触が失われると消える。垂直抗力 N [N; MLT^{-2}] を求めて $N < 0$ になったなら、その仮定は破綻している。面は物体を引けないからである。この判定は、円運動の最高点や剛体の転倒でも同じ考え方で使える。

25 力の式と条件式を分ける

運動方程式は力と加速度を結ぶ式である。一方、糸が伸びない、面から離れない、すべらない、という条件は幾何や接触の式である。この2種類を混ぜないことが重要である。たとえば「すべらない」は摩擦力が必ず $|f_s| \leq \mu_s N$ であるという意味ではない。相対運動が0であるという条件を満たすために、必要なだけの静止摩擦力 f_s [N; MLT^{-2}] が出るという意味である。式を立てる前に、自分が書こうとしているものが力の法則なのか、運動を制限する条件なのかを分ける。

種類	例	単位の見方
力の式	$\sum F = ma$	各項は [N]
幾何条件	$x_1 + x_2 = L$	各項は [m]
速度条件	$v_1 = v_2$	各項は [m/s]
接触条件	$N \geq 0, f_s \leq \mu_s N$	力として [N]

未知数が多いときは、力の式を増やすだけでは足りないことがある。糸の長さ、すべらないこと、接触の有無のような条件を別に数えると、式の本数と未知数の関係が見えやすくなる。

26 自由体図の誤答パターン

自由体図で多い誤りは、運動の向きに力を勝手に追加することである。物体が右へ動いていても、右向きの力が必ず働いているとは限らない。等速で動いているなら合力は0 [N; MLT^{-2}] である。もう1つの誤りは、作用反作用の2力を同じ自由体図に描くことである。物体AがBを押す力と、BがAを押す力は、別々の物体に働く。自由体図には、選んだ物体に働く力だけを描く。

27 符号を結果として受け取る

未知の力の向きは、最初に仮定してよい。計算の結果が負なら、その力は仮定と逆向きに働いていたという意味である。負の値が出たからといって、ただちに計算が間違いとは限らない。

ただし、垂直抗力 N [N; MLT^{-2}] や 張力 T [N; MLT^{-2}] のように、押すだけ、または引くだけの力には物理的な制限がある。 N [N; MLT^{-2}] が負なら接触は失われ、 T [N; MLT^{-2}] が負なら糸はたるむ。この場合は、仮定した状況を作り直す。負の答えは、いつも計算ミスの意味するわけではない。成分として置いた力なら、仮定した向きと逆だったと読める。しかし、接触や糸のように片側にしか働けない力では、状況そのものが変わる。

28 主要文字式の単位確認

質量 m [kg; M]、加速度 a [m/s^2 ; LT^{-2}]、合力 $\sum F$ [N; MLT^{-2}] を使うと、 ma [$kg\ m/s^2$; MLT^{-2}] は [N] と同じ単位になる。運動方程式では、左辺も右辺も力の単位 [N] でそろえる。垂直抗力 N [N; MLT^{-2}]、張力 T [N; MLT^{-2}]、摩擦力 f [N; MLT^{-2}]、重力 mg [N; MLT^{-2}] はすべて力である。摩擦係数 μ は無次元なので、 μN [N; MLT^{-2}] は力の単位をもつ。

29 数式内での単位明示

運動方程式は

$$\sum F = m \times a$$

である。 ma は $kg\ m/s^2$ 、すなわち N であり、左辺と右辺は同じ単位になる。重力、垂直抗力、張力、摩擦力は、すべて力として同じ単位をもつ。

$$mg, \quad N, \quad T, \quad f$$

30 加速度から力を逆算する

運動が先に分かっている問題では、力を足してから加速度を求めるのではなく、必要な合力を逆算してよい。

$$\sum F = ma$$

たとえば円運動なら、半径方向に必要な合力は

$$\sum F_r = m \frac{v^2}{r}$$

である。自由体図で実在する力を並べ、その半径方向の合計がこの値になるように式を立てる。

運動方程式は、力から加速度を求めるだけでなく、観測された加速度から合力を逆算するためにも使える。

質量 m [kg; M] の物体が加速度 a [m/s^2 ; LT^{-2}] で動くなら、合力は ma [N; MLT^{-2}] である。

この見方を使うと、エレベーターの見かけの重さや、円運動に必要な向心力を整理しやすい。体重計が示すのは重力 mg [N; MLT^{-2}] そのものではなく、床から受ける垂直抗力 N [N; MLT^{-2}] である。上向きに

加速すれば N [N; MLT^{-2}] は大きくなり、下向きに加速すれば小さくなる。

結果を読むときは、 N [N; MLT^{-2}] や T [N; MLT^{-2}] が負になっていないかを確認する。接触や糸の張りは、力の向きに制限をもつからである。

31 軽い糸と軽い滑車の意味

問題文で糸が軽いとされるとき、糸の質量を 0 とみなす。そのため、糸の各部分に有限な合力が働くと、無限大の加速度になってしまう。これを避けるため、理想的な軽い糸では、途中で張力が急に変わらな

いと扱う。

なめらかで軽い滑車を通る糸では、糸の両側の張力を同じ T [N; MLT^{-2}] と置く。滑車に質量や慣性モーメントがある場合は、両側の張力が異なり、その差が滑車を回転させる。

この仮定は力の式を単純にする。物体ごとに運動方程式を立てるとき、同じ糸なら同じ T [N; MLT^{-2}] と

書けるかを問題文から確認する。