慣性モーメントの基本

1 導入

この講義の核心は、**慣性モーメントは物体だけで決まる量ではなく、どの軸まわりに回すかまで含めて決まる量である**という点にある。直線運動では動きにくさを質量 m が表す（$F = ma$）。回転運動では対応する量が慣性モーメント I であり、$\tau = I\alpha$ が成立する。I は質量の総量だけでなく、軸からの距離の 2 乗で重み付けられる。

2 このページで解けるようになること

- 代表的な物体の慣性モーメントを軸つきで使う
- 平行軸の定理で軸を移した値を求める
- $\tau = I\alpha$、$K_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$ に接続する
- 慣性モーメントが軸依存であることを明確に扱う

3 方針

まず質点 1 個で $I = mr^2$ を導き、r^2 が現れる理由を回転エネルギーから確認する。つぎに連続体へ一般化し、代表形状を軸つきの表で整理する。最後に平行軸の定理で軸を移す。

4 適用条件

- 各式は、どの軸まわりかを必ず明記して使う
- $\tau = I\alpha$ や $L = I\omega$ は固定軸まわりの回転を前提とする
- 連続体の積分では密度の仮定を確認する

5 用語と定義

5.1 慣性モーメント
Moment of inertia

慣性モーメント（Moment of inertia）とは、回転軸まわりの回しにくさを表す量である。質点 m_i が回転軸からの距離 r_i にあるとき：

$I = \sum_i m_i r_i^2$

連続体では積分に置換する：

$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$

「**慣性**」という**命名**：inertia（慣性）の訳で、「動かそうとしても動きにくい性質」を意味する。「**モーメント**」は moment（瞬間・積率）の訳で、ここでは「距離で重み付けた量」の意味（r^2 で重み付けた質量の分布）。**定義が実現する性質**：I が大きいほど同じ力のモーメント τ に対して角加速度 α が小さくなる（回りにくい）。**最重要注意**：**慣性モーメントは物体固有の数値ではなく、軸まで含めて決まる。**

5.1.1 質量と慣性モーメントの比較

	質量 m	**慣性モーメント I**
表す量	直線の動きにくさ	回転の動きにくさ
運動方程式	$F = ma$	$\tau = I\alpha$
運動量	$p = mv$	$L = I\omega$
運動エネルギー	$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$
依存する量	物体の質量のみ	質量の分布と軸の位置

6 見方の整理

まず質点 1 個で $I = mr^2$ を導出し、r^2 が現れる理由を理解する。次に代表的な形状の I を積分で求め、平行軸の定理を導出する。

7 直感的な説明

扉を蝶番の近くで押しても回しにくく、端で押すと回しやすい。これは力のモーメント（腕の長さ × 力）が大きいからである。逆の見方をすれば、端に質量を集めると回しにくくなる—これが慣性モーメントの直観である。フィギュアスケーターが腕を縮めると速く回転する。腕を縮めることで I が小さくなり、角運動量 $L = I\omega$ が保存されるため ω が増大する。

8 厳密な説明

8.1 1. 質点と r^2 の起源

質点 m が半径 r で角速度 ω で回転するとき線速度は $v = r\omega$。運動エネルギーは

$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2$

直線の $K = \frac{1}{2}mv^2$ と対応させるには、m の役割を $I = mr^2$ が担う。したがって $I = mr^2$ は「$r\omega$ という速度に対応するように m を置き換えると r^2 の係数が出てくる」ことの必然である。複数質点では線形加算して $I = \sum_i m_i r_i^2$。

8.2 2. 代表的な形状の慣性モーメント

形状	軸	I
質点 m	軸から距離 r	mr^2
細い棒 M, L	重心を通る垂直軸	$\frac{1}{12}ML^2$
細い棒 M, L	端を通る垂直軸	$\frac{1}{3}ML^2$
円板 M, R	中心を通る垂直軸	$\frac{1}{2}MR^2$
球 M, R	中心を通る軸	$\frac{2}{5}MR^2$
円環 M, R	中心を通る垂直軸	MR^2

注目すべき傾向：質量が外側（大きな r）に集まるほど係数が大きい（円環 > 球殻 > 球）。

8.2.1 棒の慣性モーメントの導出（重心軸）

質量 M、長さ L の一様な棒の線密度は $\lambda = M/L$。重心を原点に置くと

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx = \frac{M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L} \cdot \frac{2(L/2)^3}{3} = \frac{1}{12}ML^2$$

8.3 3. 平行軸の定理

重心を通る軸まわりの慣性モーメントを I_G、重心から距離 d だけ離れた平行な軸まわりの慣性モーメントを I とすると

$$\boxed{I = I_G + Md^2}$$

意味：軸を重心から遠ざけると Md^2 だけ余分に増加する。**導出のスケッチ**：座標の原点を重心に置き、新しい軸を $x = d$ の位置に置く。各質点の軸からの距離の 2 乗を展開すると交差項が重心の定義より 0 になり、$I_G + Md^2$ が残る。棒の端軸の確認：$I_G = \frac{1}{12}ML^2$、$d = L/2$ を代入すると $I = \frac{1}{12}ML^2 + M(L/2)^2 = \frac{1}{3}ML^2$。表の値と一致する。

9 連続体での計算の型

連続体では、質点の和

$I = \sum_i m_i r_i^2$

を積分へ置き換える。

$I = \int r^2 dm$

一様な棒なら $dm = \lambda\, dx$、一様な板なら $dm = \sigma\, dS$、一様な立体なら $dm = \rho\, dV$ と置く。重要なのは、r が「回転軸からの垂直距離」であり、座標そのものではない場合があることだ。

10 回転半径という見方

慣性モーメントは

$I = Mk^2$

と書けることがある。この k を回転半径という。全質量 M が回転軸から距離 k の位置に集まっていると考えたとき、同じ慣性モーメントになる、という意味である。

たとえば薄い輪では $I = MR^2$ なので $k = R$、一様な円板では $I = \frac{1}{2}MR^2$ なので $k = R/\sqrt{2}$ である。質量が外側に集まるほど k は大きくなり、回転しにくくなる。

11 具体例 1: 棒の端まわり

棒の重心まわりの値を知っていれば、端まわりの値は平行軸の定理で直ちに出せる。ここでは「重心軸から軸を平行移動した」と読むことが重要である。

12 具体例 2: 転がる円板

半径 R、質量 M の円板が滑らずに転がるとき、

$K = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

である。$I_G = \frac{1}{2}MR^2$、$v_G = R\omega$ を代入すると

$K = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{4}Mv_G^2 = \frac{3}{4}Mv_G^2$

となる。回転エネルギーを落とすと誤答になる。

13 回転の運動方程式

固定した軸まわりの回転では

$\tau = I\alpha$

直線の $F = ma$ と完全に対応する。I が大きいほど同じ τ に対して α が小さい (回りにくい)。回転の運動エネルギーは

$K_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$

転がり運動では並進と回転の両方のエネルギーを合計する：

$K = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

ここで v_G は重心の速度。

14 追加例: 高さ h から転がり落ちる速さ

物体が高さ h だけ下がりながらすべらずに転がるとする。静止摩擦は接触点で仕事をしないので、力学的エネルギー保存を使える。

$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

すべりなしより $v = R\omega$ だから

$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_G\frac{v^2}{R^2}$

したがって

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I_G}{mR^2}}}}$$

となる。同じ高さを落ちても、慣性モーメントが大きいほど回転に多くのエネルギーが分配され、重心の速さは小さくなる。

15 見分け方

- 回転軸が決まり質量の広がりが問題になるとき → 慣性モーメントを計算する
- 軸が重心を通らないとき → 平行軸の定理で $I = I_G + Md^2$
- 転がり運動（すべりなし）→ $v = r\omega$ の拘束条件と $K_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

16 どこまで成り立つか

$\tau = I\alpha$ は固定軸まわりの回転に厳密に成立する。軸が動く場合（自由な剛体）にはオイラーの運動方程式が必要であり、I はテンソルになる。高校物理では固定軸まわりの回転のみを扱うことが多い。

17 よくある誤り

- 軸を書かずに数値だけ暗記する
- 半径・直径・重心からの距離を混同する
- 平行軸の定理を重心軸でない軸へ機械的に使う
- $\tau = I\alpha$ を固定軸でない回転へそのまま使う

18 最終形

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm}$$

$$\boxed{\tau = I\alpha, \qquad L = I\omega, \qquad K_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2}$$

平行軸の定理は、重心軸から距離 d だけ離れた平行な軸へ移すときに使う。

$$\boxed{I = I_G + Md^2}$$

19 一言でいうと

慣性モーメントは質量の分布を r^2 で重み付けた量であり、回転における質量の役割を担う。遠ければ遠いほど回しにくい。

20 関連リンク

→ 講義 力学ポータル lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/力学ポータル-講義/

→ 講義 回転運動の基本 lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/回転運動の基本-講義/

→ 講義 角運動量の基本 lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/角運動量の基本-講義/

21 回転軸を指定してから考える

慣性モーメントは物体だけで決まる量ではなく、回転軸まで指定して初めて決まる。同じ棒でも、中心まわりなら I_G [$\mathrm{kg\,m^2}$; $\mathsf{ML^2}$]、端まわりなら

$$I_{\text{end}} = I_G + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

となる。回転エネルギー $\frac{1}{2}I\omega^2$ [J; $\mathsf{ML^2T^{-2}}$] や運動方程式 $\tau = I\alpha$ [$\mathrm{N\,m}$; $\mathsf{ML^2T^{-2}}$] に入れる I は、必ずその軸に対する値でなければならない。

慣性モーメント I は、物体だけで決まる量ではない。同じ物体でも、どの軸のまわりに回すかで I は変わる。これは

$I = \sum_i m_i r_i^2$

において、r_i が回転軸からの距離だからである。軸を言わずに「この物体の慣性モーメント」とだけ言うと、物理的には情報が足りない。

質量が回転軸から遠いほど、r^2 で効くため回しにくくなる。同じ質量でも、中心に集まっている物体と外側に広がっている物体では、回転運動への抵抗が大きく異なる。

22 平行軸の定理の使いどころ

重心を通る軸まわりの慣性モーメントを I_G とする。その軸に平行で、距離 d だけ離れた軸まわりでは

$I = I_G + Md^2$

となる。これを平行軸の定理という。支点が端にある棒や、接点まわりに瞬間的に回る転がり運動では、この定理で軸を移すと計算が短くなる。

23 文字式の単位

慣性モーメント I [kg m^2; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2$] は、

$I = \sum_i m_i r_i^2$

で定義される。m_i [kg; M]、r_i [m; L] なので、$m_i r_i^2$ [kg m^2; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2$] となる。質量だけでなく、回転軸からの距離が二乗で効く。

回転エネルギー $K_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$ [J; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-2}$] では、$I$ [kg m^2; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2$]、ω [rad/s; T^{-1}] であり、rad を無次元とすると [kg m^2/s^2] = [J] になる。角運動量 $L = I\omega$ [kg m^2/s; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1}$] も同じ単位確認で読める。

24 慣性モーメントの大小を見積もる

慣性モーメント I [kg m^2; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2$] は、質量が回転軸からどれだけ遠いかを測る量である。同じ質量 M [kg; M] と同じ半径 R [m; L] をもつなら、質量が外周に集まる輪のほうが、円板より I [kg m^2; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2$] は大きい。

見積もりとしては、物体の大部分の質量が軸から距離 R [m; L] の近くにあるなら、I [kg m^2; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2$] は MR^2 [kg m^2; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2$] に近い。中心にも質量が広く分布しているなら、それより小さくなる。

25 転がり運動の極限

高さ h [m; L] から転がり落ちる物体では、位置エネルギー mgh [J; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-2}$] が並進の運動エネルギーと回転の運動エネルギーに分かれる。慣性モーメント I [kg m^2; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2$] が大きいほど、回転へ多くのエネルギーが使われ、重心の速さ v [m/s; $\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1}$] は小さくなる。

もし I [kg m^2; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2$] を 0 に近づけると、回転にエネルギーをほとんど使わないので、滑らずに落ちる場合の速さは質点が滑り落ちる場合に近づく。このような極限を考えると、答えの大小関係を確認できる。

26 主要文字式の単位確認

慣性モーメント I [kg m^2; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2$] は、質量 m_i [kg; M] と回転軸からの距離 r_i [m; L] の二乗から作る。$m_i r_i^2$ [kg m^2; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2$] なので、足し合わせた I も [kg m^2] である。

回転エネルギー K_{rot} [J; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-2}$] は $\frac{1}{2} I \omega^2$ [J; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-2}$]、角運動量 L [kg m^2/s; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1}$] は $I\omega$ [kg m^2/s; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1}$] である。平行軸の定理の Md^2 [kg m^2; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2$] も I [kg m^2; $\mathsf{M}\mathsf{L}^2$] と同じ単位なので足せる。

27 数式内での単位明示

慣性モーメントは

$I = \sum_i m_i r_i^2$

である。平行軸の定理でも、足し合わせる項はどちらも慣性モーメントの単位になる。

$I = I_G + Md^2$

28 慣性モーメントを選ぶ手順

慣性モーメントは、回転軸からの距離を二乗して質量に重みづけした量である。連続体では

$$I = \int r^2 dm$$

と書く。平行軸の定理では、

$$I = I_G + Md^2$$

となり、足している 2 項はどちらも $[\mathrm{kg\,m^2}]$ でそろう。公式を選ぶ前に、軸が重心軸か、端の軸かを必ず確認する。

慣性モーメント I $[\mathrm{kg\,m^2}; ML^2]$ を使うときは、最初に回転軸を決める。物体の形だけで I $[\mathrm{kg\,m^2}; ML^2]$ が決まるのではなく、軸から各部分までの距離で決まるからである。

重心を通る軸まわりの値が既知なら、別の平行軸へ移すときに平行軸の定理を使う。Md^2 $[\mathrm{kg\,m^2}; ML^2]$ は、全質量 M $[\mathrm{kg}; M]$ と軸間距離 d $[\mathrm{m}; L]$ から作る補正項である。

転がり運動では、並進の運動エネルギーと回転の運動エネルギーを足す。単位はどちらも [J] でそろえる。