直線運動と落下運動

1 導入

このページの核心は、**位置・速度・加速度を別々の量として区別し、加速度から速度、速度から位置へ進む三段構造を崩さないこと**である。等加速度運動の三公式は便利であるが、公式暗記だけでは符号ミス、原点ミス、時間消去の使い分けの失敗が起こりやすい。したがって、このページでは公式を紹介にとどめず、**軸設定** → **微分関係** → **積分**による**導出** → **代表例**の順で整理する。

2 このページで解けるようになること

- 等加速度運動の三公式の導出
- 自由落下、鉛直投げ上げ、鉛直投げ下ろしの符号整理
- 時間を含む式と、時間を消去した式の使い分け
- $x-t$、$v-t$、$a-t$ グラフの読み取り

3 何を解くページか

本線は 1 次元の等加速度運動である。したがって扱う標準形は

$a = \mathrm{const}$

である。ここから

$a_x,\qquad v_x,\qquad r_x$

の三段を順に追う。

4 方針

このページで最初に行うべきことは、**式を書く前に軸を決めること**である。落下問題では、上向きを正にしても下向きを正にしてもよい。ただし、いったん決めたら

- 位置 x
- 速度 v
- 加速度 a

のすべてをその符号規約で統一する必要がある。そのうえで

$a_x = \frac{dv_x}{dt},\qquad v_x = \frac{dr_x}{dt}$

を使って、$a_x \Rightarrow v_x \Rightarrow r_x$ の順に進む。

5 まず軸を決める

落下運動で最も重要なのは、g の符号を問題ごとに暗記しないことである。先に正方向を決め、それに合わせて

- 上向きを正にしたなら $a = -g$
- 下向きを正にしたなら $a = +g$

と置く。したがって、g は常に正の定数として持ち、符号は加速度 a の前に付ける。

6 用語と定義

6.1 位置、速度、加速度

Position Velocity Acceleration

$v_x = \frac{dr_x}{dt}, \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt}$

である。位置 r_x は「どこにいるか」、速度 v_x は「どちらへどれだけ速く動くか」、加速度 a_x は「速度がどう変わるか」を表す。

6.2 速度と速さの区別

速度は符号つきであり、速さはその大きさである。たとえば上向きを正にした投げ上げでは、落下中の速度は負でありえても、速さは正である。

6.3 等加速度運動

Uniformly accelerated motion

加速度が時間によらず一定である運動である。地表近くで空気抵抗を無視した落下はその代表例である。

7 導出または基本式

7.1 1. 速度の式

$a = \text{const}$ を積分すると

$v = v_0 + at$

を得る。

7.2 2. 位置の式

さらに $v = \dfrac{dx}{dt}$ を積分すると

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

を得る。

7.3 3. 時間を消去した式

$v = v_0 + at$ から $t = \dfrac{v - v_0}{a}$ を消去すると

$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

を得る。この式は、**時間を使いたくないときに選ぶ式**である。

8 三段セットで整理する

等加速度運動では、必ず次の三段で整理すると崩れにくい。

$$\left\{ a_x = a v_x = v_0 + at r_x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \right.$$

問題ごとに変わるのは、a の符号、v_0、x_0 のみである。

9 グラフでの読み方

9.1 $a - t$ グラフ

等加速度運動では水平線になる。値そのものが加速度であり、面積は速度の変化量

$\int a dt = v - v_0$

を与える。

9.2 $v - t$ グラフ

傾きが加速度である。面積は変位

$\int v dt = x - x_0$

を与える。

9.3 $x - t$ グラフ

傾きが速度であり、曲率の向きが加速度の符号と対応する。等加速度運動では放物線になる。

10 具体例 1: 自由落下

上向きを正とし、初速度 0、初期位置 y_0 から落とす。このとき

$a = -g, \qquad v_0 = 0$

であるから

$v = -gt$

$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$

となる。

11　具体例 2: 鉛直投げ上げ

上向きを正とし、初速度 $v_0 > 0$ で投げ上げる。

$a = -g$

より

$v = v_0 - gt, \qquad y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

最高点では $v = 0$ であるから

$t_{\max} = \frac{v_0}{g}$

を得る。さらに時間を消去した式から

$0 - v_0^2 = 2(-g)(y_{\max} - y_0)$

ゆえに

$y_{\max} - y_0 = \frac{v_0^2}{2g}$

を得る。

12　具体例 3: 鉛直投げ下ろし

上向きを正とし、下向きに速さ u で投げ下ろすなら

$v_0 = -u, \qquad a = -g$

である。したがって

$v = -(u + gt)$

となる。ここで速度が負だからといって、速さが負になるわけではない。速さは $u + gt$ である。

13　三つの代表例の比較

場面	初速度	加速度	速度の式
自由落下	0	$-g$	$v = -gt$
鉛直投げ上げ	$+v_0$	$-g$	$v = v_0 - gt$
鉛直投げ下ろし	$-u$	$-g$	$v = -(u + gt)$

この表から分かる通り、違いの本質は初速度だけであり、重力加速度の扱いは共通である。

14　見分け方

- 時間 t が与えられる、または時刻を求めたい → $v = v_0 + at$、$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
- 時間を使わず位置と速度を直接結びたい → $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$
- 最高点や折返し点が出る → まず $v = 0$ を使う

15 初期条件の置き方

等加速度運動で最初に決めるのは、x_0、v_0、a の 3 つである。

量	意味	決め方
x_0	時刻 $t=0$ の位置	原点をどこに置くかで決まる
v_0	時刻 $t=0$ の速度	正方向と同じなら正、逆なら負
a	加速度	力や重力の向きから符号つきで決める

途中の時刻を新しい $t=0$ に取り直してもよい。ただし、その瞬間の位置と速度を新しい x_0、v_0 として置き直す必要がある。

16 時間の原点を取り直す例

鉛直投げ上げで最高点から落下を考えるとき、投げ上げた瞬間を $t=0$ にしたままでもよいが、最高点を新しい $t'=0$ に取り直すと式が簡単になる。

最高点では $v_{(0)'}=0$ であり、上向きを正にすれば

$y = y_{\max} - \frac{1}{2}gt'^2, \qquad v = -gt'$

と書ける。同じ運動を別の時刻原点で見ているだけなので、物理は変わらない。変わるのは x_0、v_0、t の名前だけである。

17 グラフから式を読む問題

$v-t$ グラフが与えられたとき、傾きは加速度、面積は変位である。直線のグラフなら等加速度運動であり、面積は台形として計算できる。

$x - x_0 = \frac{v_0+v}{2}t$

これは等加速度運動の平均速度

$\bar{v} = \frac{v_0+v}{2}$

を使った式である。公式として覚えるより、$v-t$ グラフの面積と理解すると、途中で速度が負になる問題でも符号を扱いやすい。

18 相対運動の見方

2 つの物体 A、B の間隔や追いつき時刻を問う問題では、相対位置

$x_{\mathrm{rel}} = x_A - x_B$

を使うと整理しやすい。相対速度と相対加速度は

$v_{\mathrm{rel}} = v_A - v_B, \qquad a_{\mathrm{rel}} = a_A - a_B$

である。追いつく条件は $x_{\mathrm{rel}}=0$、最も接近する条件は $v_{\mathrm{rel}}=0$ で判断できる。同じ加速度で動く 2 物体なら $a_{\mathrm{rel}}=0$ となり、相対運動は等速運動になる。

19　どこまで成り立つか

- 三公式は $a = \mathrm{const}$ のときに限って成立する
- 空気抵抗が無視できないときは、加速度は一定でなくなる
- ここで扱っているのは 1 次元運動であり、平面運動では各成分を独立に扱う必要がある

20　よくある誤り

- g の符号を問題ごとに暗記し、軸設定と切り離してしまう
- 速度と速さを混同する
- $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ を、時間を求める問題に無理に使う
- 原点や正方向を途中で変えて式全体を壊す

21　まとめ

等加速度運動の三公式は、加速度から速度、速度から位置へ進む積分の結果である。落下問題では、軸を先に決め、その符号規約のもとで三段セット

$$a_x,\quad v_x,\quad r_x$$

を崩さずに使うことが最も重要である。

22　次に読むべきページ

→ 講義 **斜面・摩擦・ばねの力学** lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/斜面・摩擦・ばねの力学-講義/

→ 基本演習 **直線運動と落下** exercise physics mechanics
https://study.bem130.com/exercise/physics/mechanics/直線運動と落下-基本演習/

23　軸の向きと符号を固定する

直線運動では、式を立てる前に正の向きを決める。上向きを正にすれば重力加速度は $-g$、下向きを正にすれば $+g$ である。どちらを選んでもよいが、途中で変えてはいけない。

速度が負になることは、運動が不可能という意味ではない。決めた正の向きと逆に進んでいるという意味である。変位、速度、加速度の符号を同じ軸で読むと、折り返しや最高点の扱いが安定する。

24　文字式の単位

直線運動では、位置 x [m; L]、変位 Δx [m; L]、速度 v [m/s; LT^{-1}]、加速度 a [m/s^2; LT^{-2}]、時刻 t [s; T] を使う。初期値も同じ単位で、x_0 [m; L]、v_0 [m/s; LT^{-1}] である。

等加速度運動の式

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

では、x [m; L]、x_0 [m; L]、$v_0 t$ [m; L]、$\frac{1}{2}at^2$ [m; L] となり、右辺の各項がすべて長さの単位をもつ。速度の式でも、v [m/s; LT^{-1}]、v_0 [m/s; LT^{-1}]、at [m/s; LT^{-1}] でそろう。

25　境界条件から運動を決める

等加速度運動では、公式を覚えるよりも、境界条件をどの時刻に置くかが重要である。時刻 $t = 0$ [s; T] で $x = x_0$ [m; L]、$v = v_0$ [m/s; LT^{-1}]、加速度 a [m/s^2; LT^{-2}] が一定なら、

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

と書ける。落下では $a = -g$ [m/s^2; LT^{-2}] と置くか、下向きを正にして $a = g$ [m/s^2; LT^{-2}] と置くかを最初に固定する。どちらを選んでも、位置の各項が [m] でそろっていれば式の形は破綻していない。

直線運動では、公式を選ぶより先に、分かっている境界条件を整理する。時刻 t [s; T]、位置 x [m; L]、速度 v [m/s; LT^{-1}]、加速度 a [m/s^2; LT^{-2}] のうち、どれが初期と終状態で与えられているかを表にする。

分かっているもの	使いやすい式	理由
時間 t [s; T]	$v = v_0 + at$	速度の変化を直接追える
変位 $(x - x_0)$ [m; L]	$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$	時間を消せる
最高点	$v = 0$	折り返しの条件になる
追いつく瞬間	$x_A = x_B$	2 物体の位置が一致する

未知数が多いときほど、式を増やすのではなく、不要な量を含まない式を選ぶ。時間を問われていないなら、時間を含まない式を使うほうが短い。

26　極限で結果を検算する

導いた式は、特殊な値を入れて壊れないかを確認する。たとえば

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

で $t = 0$ [s; T] とすると $x = x_0$ [m; L] になり、初期条件に戻る。$a = 0$ [m/s^2; LT^{-2}] とすると等速直線運動 $x = x_0 + v_0 t$ [m; L] になる。落下の式なら g [m/s^2; LT^{-2}] を 0 に近づけたとき、重力なしの運動に戻るはずである。

直線運動の式を使ったあと、極端な場合にして答えが自然かを確認するとよい。たとえば加速度 a [m/s^2; LT^{-2}] を 0 [m/s^2; LT^{-2}] にすると、等加速度運動の式は等速運動に戻る。

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + v_0 t \quad (a = 0)$

また、時間 t [s; T] を 0 [s; T] にすると、$x = x_0$ [m; L]、$v = v_0$ [m/s; LT^{-1}] にならなければならない。初期条件を入れたときに最初の状態へ戻らない式は、符号か原点の置き方を間違えている可能性が高い。

27　落下運動の答えの読み方

鉛直方向の運動では、答えの符号が向きを表す。上向きを正にしたなら、速度 v [m/s; LT^{-1}] が負であることは、物体が下向きに動いていることを意味する。速さは $|\,v\,|$ [m/s; LT^{-1}] であり、速度とは区別する。最高点では $v = 0$ [m/s; LT^{-1}] だが、加速度は 0 ではない。重力が働いている限り、加速度は下向きに g [m/s^2; LT^{-2}] である。この点を混同すると、折り返しの運動を誤って静止と読んでしまう。

28　主要文字式の単位確認

位置 x [m; L]、初期位置 x_0 [m; L]、変位 Δx [m; L] は、すべて長さの単位をもつ。時刻 t [s; T]、時間差 Δt [s; T] は時間である。速度 v [m/s; LT^{-1}]、初速度 v_0 [m/s; LT^{-1}]、加速度 a [m/s^2; LT^{-2}]、重力加速度 g [m/s^2; LT^{-2}] を区別する。
等加速度運動の $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ では、x_0 [m; L]、$v_0 t$ [m; L]、$\frac{1}{2}at^2$ [m; L] で単位がそろう。$v = v_0 + at$ では、v_0 [m/s; LT^{-1}] と at [m/s; LT^{-1}] が同じ単位である。

29　数式内での単位明示

等加速度運動の基本式は

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

である。各項の単位は、すべて長さでそろう。

30　未知数表を作る

直線運動の問題では、式を書く前に x [m; L]、v [m/s; LT^{-1}]、a [m/s^2; LT^{-2}]、t [s; T] の表を作るとよい。初期と終状態を分けて、分かっている値と未知の値を入れる。
たとえば投げ上げでは、最高点で $v = 0$ [m/s; LT^{-1}] という条件が入る。地面に戻る瞬間なら、位置 x [m; L] が初期位置と同じになる。条件を言葉のまま残さず、表の中へ単位つきの量として入れる。
未知数表を作ると、時間を含む式を使うべきか、時間を消した式を使うべきかが見えやすい。求めたい量が v [m/s; LT^{-1}] で、時間 t [s; T] が不要なら、時間を含まない関係式を選ぶほうが計算は短くなる。