重心系での衝突

1　導入

この講義の核心は、**重心系（CM系）へ移ると全運動量が 0 になり、衝突が対称的に見える**という点にある。実験室系では 2 物体の速度が非対称で式が煩雑になる。しかし重心系では重心が静止しているため、1 次元の弾性衝突なら速度は向きだけを反転すればよい。

2　このページの位置づけ

このページは高校本線より一段発展である。1 次元衝突の基本は衝突と運動量保存のページで十分であり、ここでは**視点変換で計算を簡約する方法**を学ぶ。

3　このページで解けるようになること

- 重心速度 $\vec{V}$ を求めて Lab系から CM系へ移る
- 1 次元 2 体衝突を CM系で対称的に解く
- 1 次元の弾性衝突で「CM系では速度が反転する」という見方を使う
- 失われるエネルギーが CM系の内部運動に対応することを理解する

4　方針

まず Lab系での重心速度 $\vec{V}$ を求める。つぎに

$\vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{V}$

で CM系の速度へ移る。CM系で衝突を処理したあと、最後に $\vec{V}$ を足して Lab系へ戻す。

5　適用条件

- 本線は 1 次元 2 体衝突である
- 外力の力積が無視でき、全運動量が保存されるとする
- 非相対論の力学を前提とする

6　用語と定義

6.1　重心系
Center of mass frame

重心系 (Center of mass frame)（CM系、質量中心系とも）とは、系の重心が静止している慣性系であり、全運動量が 0 の系である：

$\vec{P}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \vec{u}_i = \vec{0}$

「**重心系**」の**意義**：運動量が 0 の系では、衝突の前後で2 物体の運動量が互いにつり合った形になり、対称性が見えやすくなる。

6.2 実験室系

実験室系（Lab系）とは、実験者（または標的）が静止している慣性系である。物理現象を観測する通常の視点。

6.2.1 Lab系と CM系の比較

	実験室系（Lab）	重心系（CM）
全運動量	$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \neq 0$（一般）	$\vec{P}' = \vec{0}$
重心の速度	$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$	$\vec{V}' = \vec{0}$
衝突の記述	非対称（計算が複雑）	対称（2物体が逆向きに動く）
弾性衝突後	速度の計算が複雑	1 次元では各物体の速度の向きが逆転し、大きさは不変

7 見方の整理

まず重心速度 $\vec{V}$ を計算する。各物体の速度から $\vec{V}$ を引いて CM系の速度 $\vec{u}_i$ を得る。CM系で衝突を解析したあと、$\vec{V}$ を足して Lab系へ戻す。

8 直感的な説明

電車の中でボールを投げると、中の観測者には単純に見え、地上では複雑に見える。CM系は「重心に乗って衝突を見る視点」であり、対称的な問題へ変換する。

9 厳密な説明

9.1 1. 速度変換

重心速度（Lab系での重心の速度）：

$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$

CM系での各物体の速度：

$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{V} = \frac{m_2(\vec{v}_1-\vec{v}_2)}{m_1+m_2}$

$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{V} = \frac{m_1(\vec{v}_2-\vec{v}_1)}{m_1+m_2}$

確認：$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0$（CM系での全運動量 = 0）。また $m_1|\,\vec{u}_1| = m_2|\,\vec{u}_2|$、すなわち CM系では 2 物体の運動量の大きさが常に等しく逆向き。

9.2 2. 弾性衝突の CM系での解析

CM系での衝突前の速度を $\vec{u}_1$、$\vec{u}_2$（$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0$）とする。**条件**：

- 運動量保存：$m_1\vec{u}_{(1)'} + m_2\vec{u}_{(2)'} = 0$（CM系では衝突後も成立）
- エネルギー保存：$\frac{1}{2}m_1|\vec{u}_{(1)'}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{u}_{(2)'}|^2 = \frac{1}{2}m_1|\vec{u}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{u}_2|^2$

1 次元の場合、この 2 条件から

$u_{(1)'} = -u_1,\quad u_{(2)'} = -u_2$

1 次元の弾性衝突では、CM系における各物体の速度の向きが逆転し、大きさは変化しない。 Lab系に戻すと：

$v_{(1)'} = u_{(1)'} + V = -u_1 + V = -(v_1 - V) + V = 2V - v_1$

$v_{(2)'} = 2V - v_2$

$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ を代入すると、衝突と運動量保存の講義で導出した一般式と一致する。

9.3 3. 反発係数との接続

反発係数 e は、1 次元では CM系での速度の向きの反転割合として自然に解釈できる：

$e = \frac{|u_{(1)'}|}{|u_1|} = \frac{|u_{(2)'}|}{|u_2|}$

- $e = 1$：弾性衝突（CM系で完全な速度反転）
- $e = 0$：完全非弾性衝突（CM系で速度が 0 に合体）
- $0 < e < 1$：非弾性衝突（部分的な反転）

9.4 4. CM系でのエネルギー損失

Lab系の全運動エネルギーは

$K_{\mathrm{Lab}} = K_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$

ここで $K_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}m_1|\vec{u}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{u}_2|^2$ は CM系での運動エネルギー（内部エネルギー）、$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$ は重心の運動エネルギー（衝突で変化しない）。衝突で失われるエネルギーは CM系の内部運動に対応する K_{CM} の側だけである。重心そのものの並進エネルギーは衝突で変化しない。

$\Delta K_{\max} = K_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\mu|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2 \quad \left(\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)$

これは完全非弾性衝突で 2 物体が合体し、CM系での相対運動が消えるときの最大の損失である。1 次元で反発係数が e なら、失われる運動エネルギーは

$\Delta K_{\mathrm{loss}} = (1 - e^2)K_{\mathrm{CM}}$

であり、$0 < e < 1$ の非弾性衝突では最大損失の一部だけが失われる。

μ は換算質量 (Reduced mass)（2 体問題の有効質量）。

9.5 5. 同じ質量の弾性衝突（CM系の見方）

$m_1 = m_2 = m$ のとき $V = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$、$\vec{u}_1 = \dfrac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{2}$ である。1 次元では CM系で速度が反転するので、Lab系では速度が交換される（$v_{(1)'} = v_2$、$v_{(2)'} = v_1$）ことが直ちに分かる。

10　具体例: 同質量の弾性衝突

Lab系で、同じ質量 m の 2 物体が u と 0 で衝突するとする。重心速度は

$$V = \frac{mu+0}{2m} = \frac{u}{2}$$

である。したがって CM系では

$$u_1 = \frac{u}{2}, \qquad u_2 = -\frac{u}{2}$$

となる。弾性衝突なら反転して

$$u_{(1)'} = -\frac{u}{2}, \qquad u_{(2)'} = \frac{u}{2}$$

であり、Lab系へ戻すと

$$v_{(1)'} = 0, \qquad v_{(2)'} = u$$

となる。速度交換が一瞬で見通せる。

11　CM系で解く手順

1 次元 2 体衝突を CM系で解くときは、次の順に固定すると符号が崩れにくい。

1. Lab系で重心速度 V を求める
2. $u_i = v_i - V$ で CM系の速度へ移る
3. 衝突の種類に応じて $u_{(i)'}$ を決める
4. $v_{(i)'} = u_{(i)'} + V$ で Lab系へ戻す

弾性衝突なら 1 次元では $u_{(i)'} = -u_i$ である。完全非弾性衝突なら CM系では衝突後に $u_{(1)'} = u_{(2)'} = 0$ となり、Lab系では 2 物体が重心速度 V で動く。

12　Lab系と CM系で変わらないもの

Lab系から CM系へ移ると、各物体の速度は変わる。しかし 2 物体の相対速度

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

は変わらない。なぜなら、両方の速度から同じ重心速度 $\vec{V}$ を引くからである。

$$(\vec{v}_1 - \vec{V}) - (\vec{v}_2 - \vec{V}) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

したがって反発係数のように相対速度で定義される量は、Lab系でも CM系でも同じ値として扱える。

13　見分け方

- 2 体衝突で計算が複雑 → CM系に移ると単純になる
- 弾性衝突の一般解を求める → CM系での「速度反転」から導出する
- 最大エネルギー損失 → $\frac{1}{2}\mu\,|\,\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2$ の公式を使用する
- 散乱問題（入射角度・散乱角度）→ CM系と Lab系の角度変換を使用する

14　どこまで成り立つか

重心系の手法は、外力が無視できる（または衝突時間が十分短い）条件で有効である。多体衝突や散乱理論にも同様の考え方が拡張できる。相対論的衝突では CM系（零運動量系）への変換にローレンツ変換が必要になる。

15　よくある誤り

- Lab系の速度と CM系の速度を混ぜる
- 重心速度 $\vec{V}$ を求めずに議論を始める
- 弾性衝突 in CM を「停止する」と誤解する
- エネルギー損失が Lab系の全運動から直接消えると思う

16　最終形

$$\boxed{\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}, \quad \vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{V}}$$

$$\boxed{\vec{u}_{(i)'} = -\vec{u}_i}$$

これは 1 次元の弾性衝突を CM系で見たときの速度反転である。2 次元や 3 次元の散乱では、CM系で速さは保たれるが、向きは散乱角に依存する。

$$\boxed{\Delta K_{\mathrm{max}} = \frac{1}{2}\mu\,|\,\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}$$

$$\boxed{\Delta K_{\mathrm{loss}} = (1-e^2)K_{\mathrm{CM}}}$$

この式は 1 次元衝突で用いる。

17　一言でいうと

CM系に移ると全運動量が 0 になり、弾性衝突は「CM系での速度の向きが逆転する」の一言に帰着する。

18　関連リンク

→ 講義 **力学ポータル** lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/力学ポータル-講義/

→ 講義 **衝突と運動量保存** lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/衝突と運動量保存-講義/

→ 講義 **重心の基本** lecture physics mechanics
https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/重心の基本-講義/

19　文字式の単位

重心系では、まず重心速度を引く。重心速度 V_G [m/s; LT^{-1}] は

$$V_G = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

である。分子は運動量 [kg m/s]、分母は質量 [kg] なので、結果は速度 [m/s] になる。重心系での速度は

$u_i = v_i - V_G$

と定義し、同じ速度の単位どうしを引いていることを確認する。

CM系では、Lab系の速度 $\vec{v}_i$ [m/s; LT^{-1}] から重心速度 $\vec{V}$ [m/s; LT^{-1}] を引いて、$\vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{V}$ [m/s; LT^{-1}] を作る。相対速度も [m/s] であり、系を変えても単位は変わらない。

CM系の運動エネルギー K_{CM} [J; ML^2T^{-2}] は、$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$ [J; ML^2T^{-2}] である。換算質量 μ [kg; M] を使えば、$\frac{1}{2}\mu \mid \vec{v}_1 - \vec{v}_2 |^2$ [J; ML^2T^{-2}] と書ける。ここでも速度差は [m/s] である。

20　換算質量で 2 物体の衝突を見る

2 物体の相対運動は、換算質量 μ [kg; M] を使うと 1 つの物体の運動のように扱える。

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

ここで m_1 [kg; M]、m_2 [kg; M] は 2 物体の質量である。CM系での内部運動エネルギーは

$K_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\mu \mid \vec{v}_1 - \vec{v}_2 |^2$

と書ける。μ [kg; M] と相対速度 $| \vec{v}_1 - \vec{v}_2 |$ [m/s; LT^{-1}] から、単位は [J] になる。

21　完全非弾性衝突で失われるエネルギー

完全非弾性衝突では、衝突後に 2 物体が一体となって動く。このとき CM系では、衝突後の相対速度が 0 [m/s; LT^{-1}] になる。したがって、衝突前に CM系がもっていた内部運動エネルギーが最大限失われる。Lab系で見ると、重心の並進エネルギーは残る。そのため、全ての運動エネルギーが失われるわけではない。失われるのは、重心から見た内部運動の部分である。

22　主要文字式の単位確認

Lab系の速度 v_i [m/s; LT^{-1}]、重心速度 V [m/s; LT^{-1}]、CM系の速度 u_i [m/s; LT^{-1}] は、すべて速度の単位をもつ。$u_i = v_i - V$ [m/s; LT^{-1}] では、同じ単位の量どうしを引いている。

換算質量 μ [kg; M]、相対速度 $v_1 - v_2$ [m/s; LT^{-1}] を使うと、$\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2$ [J; ML^2T^{-2}] は CM系での内部運動エネルギーになる。反発係数 e [1; 1] は無次元である。

23 数式内での単位明示

CM系の速度は

$u_i = v_i - V$

である。換算質量を使うと、CM系での内部運動エネルギーは

$K_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\mu \mid v_1 - v_2|^2$

と読める。

24 CM系で解く典型手順

CM系で衝突を解くときは、まず Lab系で重心速度 V [m/s; LT^{-1}] を求める。次に、各物体の速度から V [m/s; LT^{-1}] を引いて、CM系の速度 u_1 [m/s; LT^{-1}]、u_2 [m/s; LT^{-1}] を作る。

弾性衝突なら、CM系では衝突後に速度の向きが反転する。非弾性なら、相対速度が反発係数 e [1; 1] に従って小さくなる。最後に、CM系の速度へ V [m/s; LT^{-1}] を足して Lab系へ戻す。

この手順では、重心の並進と内部運動を分けて見る。失われる運動エネルギーは、主に CM系で見た内部運動の部分である。