

# 波のエネルギーとエネルギー密度

## 1 導入

この講義で最も重要なのは、波は媒質そのものを運ぶのではなく、エネルギーを空間の中へ運ぶという見方です。

高校物理では、波長や振動数、明暗の条件が中心になりがちですが、大学物理では「その波がどれだけのエネルギーを持ち、どのくらいの速さで運ぶか」も重要です。

## 2 用語と定義

→ 講義 波の基本 [lecture](#) [physics](#) [waves](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/physics/waves/波の基本-講義/>

→ 講義 仕事と力学的エネルギー [lecture](#) [physics](#) [mechanics](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/仕事と力学的エネルギー-講義/>

エネルギー密度とは、単位長さや単位体積あたりに蓄えられたエネルギーです。弦の1次元波では、単位長さあたりのエネルギーを見ます。

## 3 方針

弦のごく短い部分を取り、その部分の

• 上下運動による運動エネルギー

• 弦が伸びることによる弾性エネルギー

を足します。すると波のエネルギーが振幅の2乗に比例することも、平均すると運動エネルギーと弾性エネルギーが同じくらいになることも見えてきます。

## 4 直感的な説明

波が大きく揺れるほど、媒質は速く動きますし、形も大きく曲がります。したがって運動エネルギーも弾性エネルギーも大きくなります。ここから、「振幅が2倍ならエネルギーは4倍くらいになる」という感覚が出ます。

また、波の山や谷が進むということは、大きなエネルギーを持つ場所も一緒に進んでいるということです。

だから波は力や情報だけでなく、エネルギーも伝えます。

## 5 厳密な説明

### 5.1 1. 運動エネルギー密度

線密度を  $\rho$  とし、長さ  $dx$  の微小部分を見ます。その質量は

$$dm = \rho dx$$

です。

上下方向の速さは

$$\frac{\partial y}{\partial t}$$

なので、この部分の運動エネルギーは

$$dK = \frac{1}{2} dm \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx$$

です。したがって運動エネルギー密度は

$$u_K = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

です。

### 5.2 2. 弾性エネルギー密度

弦が傾くと、もとの水平な長さ  $dx$  より実際の長さは少し長くなります。ピタゴラスの定理から

$$ds = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} dx$$

です。傾きが小さいとき

$$\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$$

を使うと、

$$ds - dx \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

です。

張力を  $T$  とすると、この伸びに蓄えられる弾性エネルギーは

$$dU \approx T(ds - dx) = \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

となるので、弾性エネルギー密度は

$$u_U = \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

です。

### 5.3 3. 全エネルギー密度

したがって全エネルギー密度は

$$u = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

です。

### 5.4 4. 正弦波で確かめる

いま

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

とします。すると

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \sin(kx - \omega t), \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -Ak \sin(kx - \omega t)$$

なので、

$$u_K = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

$$u_U = \frac{1}{2}T A^2 k^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

です。

→ 講義 波動方程式の基本 [lecture](#) [physics](#) [waves](#)

<https://study.bem130.com/lecture/physics/waves/波動方程式の基本-講義/>

波動方程式から  $v^2 = T/\rho$ 、また正弦波では  $v = \omega/k$  なので

$$T k^2 = \rho \omega^2$$

です。よって

$$u_K = u_U = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

となり、

$$u = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

です。

### 5.5 5. 時間平均と強さ

$\sin^2$  の時間平均は  $1/2$  なので、

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2$$

です。したがって平均的なエネルギー密度は  $A^2$  に比例します。

波が速さ  $v$  で進むなら、単位時間に運ばれるエネルギーはおおよそ

$$P \sim \langle u \rangle v$$

で見積もれます。これが強度や音の大きさの議論へつながります。

## 5.6 6. 音波での見方

→ 講義 音波の基本 [lecture](#) [physics](#) [waves](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/physics/waves/音波の基本-講義/>

音波でも同じく、圧力の変化と粒子速度の運動を通じてエネルギーが伝わります。高校ではここを詳しく計算しないことが多いですが、強い音ほどエネルギー流れが大きい、という理解は共通です。

## 5.7 7. 光とのつながり

→ 講義 マクスウェル方程式の入口 [lecture](#) [physics](#) [electromagnetism](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/physics/electromagnetism/マクスウェル方程式の入口-講義/>

光も波としてエネルギーを運びます。ただし弦や空気のような媒質の変位ではなく、電場と磁場そのものが空間の中で変化して進みます。ここで見た力学的な波のエネルギー密度は、そのまま光のエネルギー密度と同一ではありませんが、「波はエネルギーを運ぶ」という骨格は共通です。

## 6 別の見方

### 6.1 高校物理での見方

振幅が大きいほど音や波の強さが大きい、という経験的な見方です。

### 6.2 大学物理での見方

エネルギー密度とエネルギー流束を定義し、波が連続体の中をどう運ぶかを数式で追う見方です。こちらでは強度やインピーダンス、散乱などへも進みやすくなります。

## 7 見分け方

- 振幅と強さの関係を問われたら、エネルギーが  $A^2$  に比例することを思い出します。
- 波が「何を運ぶか」を問われたら、媒質そのものではなくエネルギーと情報を運ぶと整理します。
- 大学物理の文脈なら、運動エネルギーと弾性エネルギーに分けて考えます。

## 8 どこまで成り立つか

ここでの弾性エネルギーの導出は、傾きが小さい近似を使っています。また弦の理想化として、張力がほぼ一定、減衰や外力がないことを仮定しています。

さいしゅうけい

## 9 最終形

$$u = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2$$

ひとこと

## 10 一言でいうと

- 波は媒質そのものではなくエネルギーを運びます。
- 弦の波では、そのエネルギーは運動エネルギーと弾性エネルギーに分けて読めます。

かんれん

## 11 関連リンク

→ [講義](#) [波の基本](#) [lecture](#) [physics](#) [waves](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/physics/waves/波の基本-講義/>

→ [講義](#) [波動方程式の基本](#) [lecture](#) [physics](#) [waves](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/physics/waves/波動方程式の基本-講義/>

→ [講義](#) [仕事と力学的エネルギー](#) [lecture](#) [physics](#) [mechanics](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/physics/mechanics/仕事と力学的エネルギー-講義/>

→ [講義](#) [マクスウェル方程式の入口](#) [lecture](#) [physics](#) [electromagnetism](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/physics/electromagnetism/マクスウェル方程式の入口-講義/>