波動方程式の基本

1 導入

この講義で最重要なのは、波の形がどう伝わるかは、媒質の微小部分に運動方程式を立てると 1 本の偏微分方程式に集約されることです。

高校物理では $v = f\lambda$ や定常波の条件を先に使うことが多いですが、大学物理では「そもそもどんな関数が波として伝われるのか」を方程式で見ます。この 2 つは別の話ではなく、同じ現象を異なる層で見ています。

2 用語と定義

→ 講義 波の基本 lecture physics waves
https://study.bem130.com/lecture/physics/waves/波の基本-講義/

→ 講義 偏微分と重積分 lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/偏微分と重積分-講義/

波動方程式 (Wave equation) とは、1 次元なら

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

の形をした方程式です。

ここで $y(x,t)$ は位置 x、時刻 t における変位、v は波の伝わる速さです。

3 方針

弦のごく短い部分を取り出して、そこに働く張力の差を見ます。すると、変位の曲がり具合が加速度を決めることが分かり、そこから波動方程式が出ます。

4 直感的な説明

弦がまっすぐなら、その近所には左右からほぼつり合った張力が働きます。ところが弦が曲がっていると、左右の張力の向きがずれて、上向きや下向きの合力が残ります。

つまり、波が進むとは、変位そのものがただ横へ移るのではなく、曲がっている場所が次の時刻の加速度を決めている、ということです。この見方を持つと、進行波も反射波も定常波も、同じ方程式の解として見られるようになります。

5 厳密な説明

5.1 1. 弦の微小部分に運動方程式を立てる

張力 を T、線密度を ρ とします。x から $x + \Delta x$ までの微小部分を取ると、質量 は

$$\rho \Delta x$$

です。

変位が小さいとして、張力 の大きさはほぼ一定で、向きだけが少しずれるとみなします。すると y 方向の合力 は

$$T \sin\theta(x + \Delta x) - T \sin\theta(x)$$

です。

小さい角度では $\sin\theta \approx \tan\theta$ なので、

$$\sin\theta \approx \frac{\partial y}{\partial x}$$

とみなせます。したがって合力 は

$$T\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)\right)$$

となります。

これを Δx で割って極限を取ると、

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

が単位長さあたりの上向き 力 です。よって運動方程式

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

を得ます。Δx を消して

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

です。

ここで

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

とおけば、

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

となります。

5.2 2. 進行波がこの方程式を満たすことを確かめる

いま

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

という形を考えます。これは、時刻が t だけ進むと形がそのまま右へ vt だけ移る関数です。

このとき連鎖律で

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -vf'(x - vt), \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt)$$

また

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x - vt), \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x - vt)$$

なので、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

が成り立ちます。したがって任意の形の進行波は波動方程式の解です。

5.3 3. 定常波も同じ方程式の解

→ 講義 定常波の基本 lecture physics waves
https://study.bem130.com/lecture/physics/waves/定常波の基本-講義/

右向きの波 $f(x - vt)$ と左向きの波 $g(x + vt)$ の和

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

も線形性により解です。ここで特に

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t), \qquad y_2 = A\sin(kx + \omega t)$$

を足すと、

$$y = 2A\sin kx \cos \omega t$$

となり、節と腹が固定された定常波が得られます。

5.4 4. 微分方程式としての見方

→ 講義 二階線型定数係数微分方程式の基本 lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/二階線型定数係数微分方程式の基本-講義/

空間と時間の両方に依存するので、普通の 2 階微分方程式より 1 段広い世界にいます。ただし

$$y(x,t) = X(x)T(t)$$

のように変数分離をすると、空間側と時間側に 2 階微分方程式が現れます。これが固有振動や共鳴の議論につながります。

6 別の見方

6.1 高校物理での見方

波の基本式 $v = f\lambda$ と定常波の条件を使って答えを出す見方です。まずこちらで問題が解けることは大切です。

6.2 大学物理での見方

波動方程式を立てて、その解として進行波や定常波を見る見方です。こちらの見方では、境界条件や外力を変えたときに、どこが変わりどこが変わらないかを整理しやすくなります。

7 見分け方

- 弦や媒質の微小部分に運動方程式を立てる問題なら、波動方程式の見方が効きます。
- 定常波や固有振動を問うなら、境界条件と変数分離を意識します。
- 進行波の形そのものを問うなら、$f(x - vt)$ や $g(x + vt)$ の形を疑います。

8 どこまで成り立つか

ここでの導出は、変位が小さく、張力がほぼ一定で、弦の傾きが小さいという近似を使っています。大振幅の運動や非線形な媒質では、この単純な波動方程式からずれます。

9 最終形

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

$$\boxed{y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)}$$

10 一言でいうと

- 波動方程式は、弦の微小部分に運動方程式を立てると現れる、波の共通言語です。
- 進行波も定常波も、この 1 本の方程式の解として読めます。

11 関連リンク

→ 講義 波の基本 lecture physics waves
https://study.bem130.com/lecture/physics/waves/波の基本-講義/

→ 講義 **定常波の基本** lecture physics waves
https://study.bem130.com/lecture/physics/waves/定常波の基本-講義/

→ 講義 **二階線型定数係数微分方程式の基本** lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/二階線型定数係数微分方程式の基本-講義/